

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI URBINO, “Carlo Bo”

FACOLTÀ DI SCIENZE AMBIENTALI

Dottorato di Ricerca in Scienze Ambientali

Ciclo XVII

MODELLI STOCASTICI

PER LA DISPERSIONE TURBOLENTA DEGLI INQUINANTI

NEI FLUIDI GEOFISICI

Relatore :

Dott. Francesco TAMPIERI

Tesi di Dottorato di :

Gianni PAGNINI

Anno Accademico

2003-2004

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Tra teoria e modelli	6
1.2	La casualità nei flussi turbolenti	11
1.3	Esperimenti: in laboratorio o al calcolatore?	14
1.4	Organizzazione del testo	17
2	Caratteristiche generali della dispersione turbolenta	18
2.1	Caratteristiche lagrangiane della turbolenza	18
2.2	Relazione tra statistiche euleriane e lagrangiane	20
2.2.1	Formula di Thomson-Novikov	23
2.2.2	Cambio di variabili per la formula di Thomson-Novikov	25
2.2.3	Inversione della formula di Thomson-Novikov	26
2.3	Dispersione assoluta	27
2.3.1	Concentrazione media	29
2.4	Dispersione relativa	31
2.4.1	L.F. Richardson, G.K. Batchelor e S. Corrsin	33
2.4.2	Fluttuazioni di concentrazione	36
3	Metodi stocastici per la modellizzazione della dispersione turbolenta	39
3.1	L'ipotesi di markovianità	40
3.1.1	Il processo di Wiener	42
3.1.2	L'equazione di Chapman-Kolmogorov	44
3.1.3	Equazioni differenziali stocastiche	47
3.1.4	Dall'equazione di Langevin all'equazione di Fokker-Planck	52
3.1.5	Approssimazioni numeriche dei momenti statistici	53
3.2	Consistenza con le caratteristiche del flusso	56
3.2.1	Processi stocastici e velocità lagrangiana turbolenta	57
3.2.2	I modelli Well-Mixed	58
3.2.3	Significato fisico del coefficiente di drift	59
3.2.4	Modelli Well-Mixed per la dispersione assoluta	61
3.2.5	Modelli Well-Mixed per la dispersione relativa	62

3.2.6	L'indeterminazione nei modelli Well-Mixed	65
4	Modelli stocastici in coordinate sferiche per la dispersione relativa in flussi turbolenti isotropi	67
4.1	Caratteristiche generali	68
4.1.1	Trasformazione di variabili	69
4.1.2	Formulazione Well-Mixed ed indeterminazione	71
4.1.3	Analogo cartesiano	75
4.1.4	Equazioni dinamiche e coefficienti stocastici	79
4.2	Modelli	83
4.2.1	Modello Quasi-Unidimensionale di Kurbanmuradov	83
4.2.2	Modello quadratico Quasi-Unidimensionale di Borgas- Yeung	85
4.2.3	Modello di Novikov-Pedrizzetti	85
4.2.4	Modello cinematico	87
4.2.5	Confronto tra il modello cinematico e quello di Kur- banmuradov: risultati analitici	90
4.3	Limite per piccole lunghezze di scala e PDF euleriana	92
5	Misure di quantità lagrangiane di simulazioni numeriche dirette	96
5.1	Caratteristiche generali	96
5.1.1	Scala temporale e scala spaziale.	101
5.2	Statistiche lagrangiane relative	106
5.3	Densità di probabilità	112
5.4	Connessione con i modelli stocastici	118
A		119

Capitolo 1

Introduzione

La presente ricerca è indirizzata alla formulazione, per mezzo dei metodi stocastici, di modelli per la comprensione di alcuni aspetti della dispersione turbolenta non ancora completamente noti. I processi analizzati (dispersione assoluta e dispersione relativa) consentono lo studio della concentrazione media e delle sue fluttuazioni, misure di diretta applicazione in campo ambientale.

Negli ultimi anni le problematiche ambientali sono diventate sempre più frequentemente oggetto di cronache e discussione, cosicché la ricerca in questo settore riveste ora un ruolo non secondario anche all'interno di questioni riguardanti la società o la politica; per una riflessione su questi aspetti si veda [123] ed il dossier *Una scienza nuova per l'ambiente* (*Sapere*, Ottobre 2003) contenente, tra gli altri, l'articolo [124] largamente citato in seguito. L'ambiente, così genericamente indicato, è sicuramente un concetto troppo vasto perchè si possa parlarne senza commettere gravi imprecisioni ed un suo specifico ambito di ricerca, di rilevante importanza, è certamente la dispersione degli inquinanti nei fluidi geofisici (atmosfera e mari).

Atmosfera e mari sono mantenuti in condizioni di flusso turbolento principalmente da forzanti dovute alle differenze di temperatura e densità generate dal differente riscaldamento della terra, da parte del sole, tra fasce tropicali e zone polari; il conseguente gradiente di pressione dà luogo ai venti i quali, per effetti di attrito con il suolo, presentano un gradiente di velocità che, a sua volta, contribuisce a rendere turbolento il flusso. Una delle caratteristiche principali del trasporto nei flussi turbolenti è la grande capacità di mescolamento che rende la turbolenza una componente fondamentale nello studio e nella modellistica della dispersione.

Il trasporto turbolento si realizza in un intervallo di scale spaziali molto esteso: dalla scala planetaria, legata alla circolazione globale, alla scala urbana ed inferiore [25]. Il fenomeno può essere approssimato, a scale planetarie, da un processo bidimensionale mentre rispetto a scale più piccole esso è intrinsecamente tridimensionale; questo comporta differenze dinamiche

sostanziali [143].

Innumerevoli sono le circostanze in cui si fa esperienza di flusso turbolento: comune a tutti è infatti l'esperienza di vedere, in presenza di vento debole, i mulinelli di foglie secche oppure, in assenza di vento, salire bolle d'aria calda dall'asfalto sotto forma di ondeggiamenti della trasparenza dell'aria, o osservare le correnti dei ruscelli ed i moti convettivi nei mari [124]. La turbolenza si realizza inoltre in molti altri fenomeni naturali, ad esempio: la formazione delle galassie all'origine dell'universo, la convezione termica nelle stelle, i flussi attorno alle automobili, le imbarcazioni o i velivoli, il mescolamento della crema in una tazza di caffè [39]. La ricerca nel trasporto turbolento in campo ambientale è dunque solo una delle sue svariate applicazioni; per quelle in campo industriale ed ingegneristico si veda ad esempio [48].

La presente ricerca è motivata principalmente dalla mancanza di conoscenza di alcuni aspetti fondamentali del trasporto turbolento. Inoltre, questa mancanza è tale per cui i modelli di qualità dell'aria oggi disponibili, sebbene abbiano caratteristiche anche commerciali per rispondere alle richieste di enti, amministrazioni, industrie etc., forniscono, comunque, risposte che risultano limitate, se non errate [31, 27, 123].

Lo studio della dispersione degli inquinanti e le conseguenti valutazioni di impatto ambientale e qualità dell'aria sono analisi che integrano tra loro informazioni provenienti dal monitoraggio, dalla modellistica e dagli inventari delle sorgenti. La combinazione di queste conoscenze costituisce un efficace approccio al problema e la modellistica rappresenta lo strumento di sintesi del processo conoscitivo: essa, infatti, contiene tutti i principali aspetti del fenomeno e fornisce informazioni sulle relazioni fra emissioni e concentrazione o deposizione degli inquinanti (primari o secondari), tenendo conto dei processi di dispersione, trasporto, trasformazione chimica e rimozione. I modelli, inoltre, giocano un ruolo importante in quanto possono estendere il dato sperimentale puntuale a porzioni di territorio ove non esiste la misurazione, considerando la distribuzione spazio-temporale delle emissioni e le caratteristiche meteo-diffusive del sito, discriminando così tra le sorgenti, possono, inoltre, consentire di studiare scenari ipotetici.

La richiesta da parte della società di modelli per la dispersione degli inquinanti finalizzati ad operare valutazioni di qualità dell'aria ed eventuali pianificazioni, ha fatto sí che la ricerca nel settore ambientale, svolta sotto la spinta dell'emergenza, tenda ad essere valutata in base a quanto sia soddisfacente la risposta data al committente (amministrazioni pubbliche, politici, industrie, ...) piuttosto che sulla qualità scientifica. Ciò ha determinato un meccanismo di ricerca generalmente contrario a quello delle scoperte classiche: in campo ambientale è venuta prima la domanda da parte della società e poi la ricerca finalizzata a dare una risposta [124]. Così, storicamente, le esigenze applicative hanno influenzato la ricerca in turbolenza più del desiderio di comprendere il fenomeno [70].

In genere, i modelli si avvalgono, in larga parte, di ricerche fondamentali svolte anche quaranta o cinquanta anni fa, prima dell'insorgenza delle attuali emergenze ambientali [35, 123].

Come già detto, la presente ricerca è stata motivata principalmente dalla mancanza di conoscenza di alcuni aspetti di base del problema della turbolenza e, conseguentemente, dalla loro immediata ricaduta sull'attendibilità delle previsioni dei modelli di qualità dell'aria. I modelli di cui si tratterà sono finalizzati alla comprensione di un fenomeno naturale e costituiscono pertanto rappresentazioni della realtà fisica, diversamente dai modelli operativi di qualità dell'aria sopraccitati i quali utilizzano conoscenze fisiche già acquisite, anziché produrne di nuove.

I modelli di dispersione turbolenta considerati si riferiscono a particelle intese essere traccianti perfetti del moto del fluido, nè più pesanti (ad esempio aerosol immessi in atmosfera dalla combustione), nè più leggeri (ad esempio gocce di petrolio in mare o gas caldo in atmosfera) analizzate per intervalli temporali inferiori ad un loro possibile tempo di reazione. Quindi, quanto si ottiene dal modello può essere inteso come proprietà del flusso, poichè ogni particella può essere considerata anche come particella del fluido stesso. L'obiettivo di questo lavoro di tesi è dunque contribuire a colmare, attraverso modelli, la mancanza di conoscenza della dispersione nei flussi turbolenti, nell'ottica di fornire conoscenze scientificamente fondate per qualsivoglia applicazione, ambientale e non.

I modelli presentati sono scelti e sviluppati in relazione alle proprietà che consentono di analizzare: nella presente ricerca sono stati studiati i modelli di dispersione assoluta (una singola particella) e quelli di dispersione relativa (due particelle). Dai modelli di dispersione assoluta si ottengono informazioni riguardanti, ad esempio, la concentrazione media punto per punto, la posizione del baricentro e la dimensione ad un certo istante dell'insieme delle particelle emesse, misure utili per la pianificazione, a lungo periodo, delle emissioni di inquinanti rilasciati, in modo continuo, in atmosfera o in mare, da sorgenti di piccole dimensioni lontane da fondi solidi (terreno, fondo marino, costruzioni etc.) [124]. Dai modelli di dispersione relativa si ottengono, in casi idealizzati, le fluttuazioni rispetto al valor medio di concentrazione dopo un breve intervallo di tempo dal rilascio e, conseguentemente, la misura della non uniformità nella distribuzione delle particelle, dato in alcuni casi più importante del valore medio: ne è un esempio l'innesto di reazioni chimiche. Si è scelto di approfondire maggiormente il secondo caso.

Un'altra caratteristica evidente del trasporto turbolento è la sua marcata irregolarità: ciò costituisce, accanto alla già sottolineata grande capacità di mescolamento, un'altra proprietà fondamentale. Tale irregolarità influenza fortemente il moto delle particelle e fa apparire la dispersione turbolenta un processo casuale (si veda il paragrafo 2 del presente capitolo). L'approccio modellistico utilizzato, quindi, è quello dei processi markoviani: le equazioni cinematiche per la posizione e la velocità delle particelle sono sostituite dal

loro analogo stocastico e la loro densità di probabilità congiunta consente di misurare le quantità statistiche utili alla caratterizzazione della dispersione turbolenta.

1.1 Tra teoria e modelli

Come già scritto, un'altra caratteristica fondamentale del trasporto turbolento, accanto alla grande capacità di mescolamento, è la marcata irregolarità. La dispersione nei flussi turbolenti sembra avvenire in maniera casuale e ciò influenza e caratterizza il moto. Tuttavia, contrariamente a quello che si può pensare, la turbolenza è un fenomeno del tutto deterministico. L'equazione che ne governa la dinamica è una diretta applicazione della seconda legge di Newton corredata della cosiddetta *ipotesi del continuo* secondo la quale ogni volumetto di fluido è abbastanza grande per contenere un elevatissimo numero di molecole ed, allo stesso tempo, abbastanza piccolo rispetto alle dimensioni globali del sistema da poter essere considerato puntiforme. Tale volumetto è detto particella di fluido ed al suo interno i parametri termodinamici (pressione e temperatura) sono considerati essere costanti. La turbolenza risulta, pertanto, un problema di meccanica classica. Le equazioni che si ottengono sono

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{u}, \quad (1.1)$$

dove $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è il campo vettoriale di velocità del flusso nel punto \mathbf{x} all'istante t , $\rho(\mathbf{x}, t)$ è la densità del fluido, $p(\mathbf{x}, t)$ la pressione e ν la viscosità cinematica. Le equazioni in (1.1) sono dette di Navier-Stokes e sono note dal 1827. Quando occorre, alla componente verticale si aggiunge l'accelerazione dovuta al campo di gravità. Il termine a sinistra dell'uguale in (1.1) è chiamato *derivata totale* o *derivata materiale*, esso rappresenta, in forma contratta, il contributo dato dalla variazione nel tempo del campo di velocità $\partial\mathbf{u}/\partial t$ e dalla avvezione $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}.$$

Qualunque quantità, associata ad un volumetto, che si conservi nel tempo sarà tale per cui la sua derivata totale risulterà nulla, in particolare, nel caso di un fluido incomprimibile, una di queste quantità è la densità ρ da cui si ottiene l'equazione

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\rho = 0. \quad (1.2)$$

Dal principio di conservazione della massa si ricava l'equazione detta di continuità

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla(\mathbf{u}\rho) = 0, \quad (1.3)$$

dalla quale, sviluppando l'operatore di divergenza, nel caso di un fluido incomprimibile (1.2) si ha

$$\nabla \mathbf{u} = 0. \quad (1.4)$$

In questo lavoro saranno studiate le caratteristiche del trasporto turbolento esclusivamente nei fluidi incomprimibili, ne segue che le equazioni di Navier-Stokes (1.1) saranno intese essere associate sempre alla (1.4).

Adimensionalizzando l'equazione (1.1) con una scala per le velocità σ (ad esempio la sua deviazione standard) ed una per le posizioni L (ad esempio la larghezza massima per la quale si estende il moto) si ottiene, per quantità senza dimensione fisica,

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\nu}{\sigma L}\nabla^2\mathbf{u}, \quad (1.5)$$

da cui si osserva che la dinamica dei fluidi è caratterizzata da un unico parametro detto numero di Reynolds Re

$$Re = \frac{\sigma L}{\nu}. \quad (1.6)$$

Nel caso di bassi valori di Re il termine dovuto alla viscosità risulta dominante ed il flusso che ne segue è regolare e detto laminare. Nel caso invece di alti valori di Re il flusso diventa irregolare ed è detto turbolento.

I flussi turbolenti in atmosfera si manifestano nello strato influenzato dalla presenza del suolo (Strato Limite Atmosferico), essi sono indotti, prevalentemente, dall'attrito col suolo o dal trasferimento di calore. I processi di trasporto, in questo strato, si estendono da qualche centinaio di metri a pochi chilometri [122]. La viscosità cinematica dell'aria è circa $10^{-5}m^2s^{-1}$, cosicché per moti che si estendono per 10^3m con velocità dell'ordine di $1ms^{-1}$ si ha $Re \sim 10^8$. Per quanto riguarda i mari, essi hanno una viscosità cinematica più piccola, attorno a $10^{-6}ms^{-2}$, ed una scala del moto maggiore $L \sim 10^4m$, ne segue che lo stesso numero di Reynolds si ottiene con velocità dell'ordine di $10^{-2}ms^{-1}$. La turbolenza, nei mari, si sviluppa a velocità minori che in atmosfera. Infatti, determinazioni sperimentali di alcune caratteristiche della turbolenza si ebbero prima con misure effettuate nell'oceano che in atmosfera [124].

Sebbene, però, la turbolenza sia un fenomeno naturale macroscopico e pertanto appartenere al dominio della cosiddetta fisica classica ed inoltre avere una solida teoria perchè fondata sulla seconda legge di Newton, essa risulta essere ancora un problema aperto. In modo un pò altisonante è spesso indicata come 'l'ultimo grande problema irrisolto della fisica classica' [46].

In un noto articolo del 1990 U. Frisch e S. A. Orszag [39] confermano questa opinione sin dall'incipit

La ricerca nella fisica classica macroscopica, come la fluidodinamica o certi aspetti di fisica della materia condensata, continua ad affrontare

sconcertanti sfide che non sono meno esigenti di quelle alle frontiere post-newtoniane della fisica, esplorate sin dagli inizi di questo secolo

per poi concludere con lo stesso tono

Lasciateci concludere notando che si conosce meno della turbolenza a scala fine - ad esempio la scala di 1mm in atmosfera - di quanto si conosca della struttura dei nuclei atomici. La mancanza di conoscenze di base in turbolenza rallenta il progresso in campi diversi come la cosmologia, la meteorologia, l'aeronautica e la biomeccanica. Comprendere la complessità organizzata gerarchicamente della turbolenza può fornire un paradigma per comprendere una vastità di problemi alle frontiere della ricerca in fisica

infatti, nonostante molti aspetti dei flussi turbolenti siano stati compresi fenomenologicamente ne manca ancora una organizzazione sistematica.

Le equazioni di Navier-Stokes (1.1) sono sufficienti per descrivere l'infinità di fenomeni connessi con la fluidodinamica, in particolare tutto ciò che occorre per descrivere e predire il moto in atmosfera e nei mari. Purtroppo la non linearità delle equazioni, dovuta al termine $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, le rende di difficilissima trattazione matematica, non esiste ancora una soluzione in casi generali [139]. La soluzione può essere ottenuta, per certe condizioni iniziali, attraverso i calcolatori, ma queste non portano una effettiva comprensione del fenomeno [46].

Così, sebbene, le equazioni siano note da tempo esistono grandi difficoltà pratiche nello studio della dinamica dei fluidi e l'infinità di casi descritti dalle medesime equazioni di Navier-Stokes (1.1) comportano, nei casi particolari, grande lavoro per cercarne approssimazioni e parametrizzazioni, cosicché, pur facendo riferimento alle stesse equazioni chi si occupa di un determinato aspetto, in genere, non si occupa anche di altri: ad esempio chi si occupa di meteorologia non progetta auto da corsa e viceversa [123].

Lo studio della turbolenza ha radici storiche molto lontane, non solo dal 1827 come già visto con le equazioni di Navier-Stokes, ma le prime intuizioni fenomenologiche sembrano risalire fino a Leonardo da Vinci (1452-1519).

Tuttavia, il fatto che l'equazione che ne governa la dinamica fosse nota ha forse indotto la comunità dei fisici a ritenerlo un problema concluso, nonostante l'enfatica chiusura del capitolo sulla fluidodinamica di R. Feynman [34]

L'aver scritto un'equazione non toglie al flusso dei fluidi il suo fascino, il suo mistero o il suo potere di sorprenderci

avendo egli bene in mente il fatto che le equazioni di Navier-Stokes descrivono un numero elevato di fenomeni.

L'idea fornita da L. Landau, secondo cui la turbolenza sarebbe solamente la conseguenza di una infinità di biforcazioni (instabilità) finché il moto non diventa caotico, soddisfò la comunità scientifica attratta da altro; ad esempio

le particelle subatomiche. Così, il problema della dinamica dei fluidi è stato storicamente un argomento trattato più dagli ingegneri e meno dai fisici [46]. Però, come dimostrarono nel 1971 D. Ruelle e F. Takens [108], un sistema può diventare caotico anche dopo un numero finito di biforcazioni [39].

Sfogliando le referenze dei libri si trovano nomi di fisici e matematici illustri che, nel corso della loro carriera, si sono messi alla prova nel tentativo di trovare una soluzione alla turbolenza senza però lasciar segno tra le leggi che ne costituiscono l'attuale paradigma; significativo esempio è la frase attribuita ad A. Einstein da J.C.R. Hunt [49] secondo cui egli, dopo aver risolto altri problemi della fisica, avrebbe risolto quello della turbolenza. Tuttavia, la soluzione del problema della turbolenza resta ancora aperto così come la domanda se la sua soluzione sia dello stesso tipo di altri problemi o sull'universalità delle sue caratteristiche [143, 49, 74, 24].

La forte casualità del moto in regime turbolento ha fatto sí che nascesse, accanto alla teoria classica e deterministica, una teoria statistica della turbolenza. L'obbiettivo era quello di ottenere un insieme finito di equazioni per le quantità medie, ad esempio, della velocità e l'energia, approccio iniziato da O. Reynolds. Tuttavia, nessun insieme finito di equazioni può essere determinato mediando le equazioni di Navier-Stokes (1.1).

Eccezione a questa disfatta dei grandi delle scienze del XX secolo è A. N. Kolmogorov. A. N. Kolmogorov diede nel corso della sua carriera contributi fondamentali in diversi campi della matematica e della fisica, oltre ad essersi interessato anche di storia russa. Nel 1941, A.N. Kolmogorov espone in due articoli [61, 60] di poche pagine ciascuno quello che costituisce ancora lo schema concettuale alla base della teoria statistica della turbolenza.

Egli spiegò che le proprietà fondamentali della turbolenza sono invarianti per cambiamenti di scala per separazioni spaziali più grandi di quelle dominate dalla viscosità cinematica e più piccole di quelle influenzate dalle condizioni al contorno, questo intervallo di scale prende il nome di *intervallo inerziale*. Inoltre, in tale intervallo, il tasso medio di energia cinetica turbolenta dissipata per effetti viscosi è costante [83, 84, 38, 124]. Ne segue che la viscosità cinematica ν ed il tasso medio di dissipazione ε sono i due parametri dimensionali che influenzano il moto. L'insieme delle proprietà della turbolenza prescritte da A.N. Kolmogorov costituisce una teoria, questa viene spesso indicata con l'acronimo K41. L'approccio di A.N. Kolmogorov introduce quindi anche la scala spaziale η e quella temporale τ_η sotto le quali il moto è fortemente influenzato dalla viscosità cinematica ν e sono così definite

$$\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}, \quad \tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2}, \quad (1.7)$$

inoltre, esse risultano legate al numero di Reynolds (1.6) nel modo seguente

$$\eta = Re^{-3/4}L, \quad \tau_\eta = Re^{-1/2}L/\sigma, \quad (1.8)$$

posto $\varepsilon = \sigma^3/L$.

Nel 1962, lo stesso A.K. Kolmogorov [62] propose una teoria che migliorasse la precedente K41 considerando anche effetti detti di *intermittenza* [38]. Questi effetti sono dovuti, ad esempio, al realizzarsi di velocità molto alte della velocità del flusso e, come conseguenza, rompono l'invarianza di scala predetta, essi sono stati riscontrati anche sperimentalmente [3]. Nel presente lavoro tali effetti non sono considerati.

E' necessario notare, però, che la teoria di Kolmogorov non usa affatto le equazioni di Navier-Stokes ma solo corrette intuizioni fisiche. Infatti, come riportato in [124], lo stesso A.N. Kolmogorov notò "che non c'era possibilità di sviluppare una teoria matematica chiusa e, in mancanza di tale teoria, fu necessario utilizzare alcune ipotesi basate sui risultati del trattamento dei dati sperimentali".

Le teorie della turbolenza successive alle idee di A.N. Kolmogorov furono formulate utilizzando metodi sviluppati in teoria dei campi. In particolare, R. Kraichnan nel 1958 propose di adottare i metodi perturbativi ideati per l'elettrodinamica quantistica ad una teoria statistica della turbolenza. Tuttavia, la teoria di R. Kraichnan non risultò coerente con alcuni risultati noti. In seguito, nel 1986 V. Yakhot e S.A. Orszag applicarono alle equazioni di Navier-Stokes un metodo detto "Gruppo di rinormalizzazione", anch'esso mutuato dalla teoria dei campi [39].

L'uso che si è fatto del termine teoria è tale per cui, allo stadio attuale della ricerca in fluidodinamica essa possa essere intesa in un'ottica storica. Sebbene si tratti di un problema di meccanica classica la classificazione delle conoscenze che si hanno prosegue per approssimazioni successive ed imparando dai propri errori, risultando di fatto un campo di ricerca ancora in larga parte inesplorato.

In questo senso, le teorie scientifiche rappresentano ipoteticamente il mondo. Come scrive G. Boniolo ([16] p. 114-115), trattando della concezione di H. Hertz e L. Boltzmann della teoria scientifica, essa è una rappresentazione nel senso "di qualcosa che consente di orientarci intellettualmente nel mondo e che è oggettivamente formato, costruito, dal soggetto delle conoscenze secondo certe regole. Una costruzione, fatta in un dato linguaggio -segnatamente quello matematico-, che presenta, in modo oggettivo e ipotetico, le relazioni e gli elementi del mondo al fine di conoscerlo e di viverci".

La teoria fisica "non deve essere considerata né come la descrizione vera del mondo, né come la meglio approssimata, bensì quale *rappresentazione che, ora come ora, permette di rendere conto nel modo più uniforme e comprensivo della totalità dei fenomeni*" (la parte in corsivo è attribuita da G. Boniolo a L. Boltzmann).

"Questo, significa intendere le teorie non come formulazioni vere o verisimili, ma come tentativi di afferrare quelle conoscenze empiriche che in una data epoca si hanno". La teoria definisce le leggi di natura che possono esse-

re confrontate o contraddette dall'esperienza e queste leggi hanno il potere di consentire di trarre inferenze dal passato al futuro, sono cioè predittive.

Con quanto riportato, non si vuole entrare in una discussione su un'idea realista o antirealista, come potrebbe sembrare, della teoria scientifica, ma piuttosto evidenziare un processo storico della conoscenza scientifica che in fluidodinamica appare ancora molto vivo sebbene si tratti di un argomento studiato da molti anni.

Tuttavia, la difficoltà e la complessità del fenomeno della turbolenza non consente, nella maggioranza dei casi, una trattazione unitaria di tutte le possibili specificazioni del problema, probabilmente l'unico caso in cui ciò avviene è quello delle equazioni di Navier-Stokes (1.1). Questa difficoltà rende necessario l'uso dei modelli come "rappresentazioni particolari che permettono di affrontare, o di affrontare meglio, quel dato ambito" ([16] p. 130). Lo sviluppo di modelli quindi, come anche quelli qui analizzati, costituisce un imprescindibile passo nella comprensione della turbolenza.

1.2 La casualità nei flussi turbolenti

Nel presente capitolo introduttivo, si ritiene opportuno illustrare la natura della casualità nei flussi turbolenti.

Spesso, per rendere comprensibile l'espressione 'moto casuale delle particelle', si fa riferimento al cosiddetto moto browniano. Con questo nome si intende, in genere, un moto irregolare di un insieme di particelle, ciascuna indipendente in ogni istante dalle altre e dal proprio stato precedente. La denominazione 'moto browniano' deriva dal nome del botanico inglese Robert Brown che, nel 1827, ne diede la prima descrizione osservando il moto di piccoli grani di polvere in sospensione nell'acqua. Il moto che si osserva appare completamente casuale e ne segue che le sue proprietà debbano essere espresse in termini statistici: queste sono contenute, in particolare, nella probabilità che una particella sia in un punto ad un dato istante.

Lo studio del moto browniano coinvolse alcuni dei nomi storici della fisica e della matematica, a partire da A. Einstein che nel 1905 ne diede di esso una interpretazione in termini stocastici: il suo può essere considerato come il primo esempio di modellizzazione stocastica [40]. Nel 1906, M. von Smoluchovski derivò in maniera indipendente un'interpretazione analoga a quella di A. Einstein: a lui si deve, inoltre, parte dello studio sistematico sul moto browniano.

La spiegazione del moto Browniano consiste nel considerare i grani di polvere spinti continuamente dagli urti delle molecole d'acqua: per la complessità di questo processo la posizione dei grani appare di natura probabilistica.

Nel 1908, P. Langevin formulò un'equazione, sulla base della dinamica Newtoniana, che potesse descrivere il moto Browniano. L'idea originale di P.

Langevin fu di associare alla forza dovuta alla viscosità del fluido, una forza aleatoria con determinate proprietà statistiche; questo è il primo esempio di equazione differenziale stocastica. L'idea di P. Langevin aprì un nuovo campo di ricerca in matematica e se ne ebbe una sua sistematica trattazione solo a partire dal 1942 con K. Ito [53].

L'uso dell'equazione di Langevin e dei metodi stocastici è fortemente diffuso in molti campi della ricerca in fisica, chimica e biologia [137, 40]. Lo stesso trasporto turbolento, per la sua essenza casuale, venne modellato attraverso l'equazione di Langevin ed il moto browniano [90] ed anche nel presente lavoro le equazioni del moto sono intese essere l'analogo stocastico delle equazioni cinematiche e pertanto risultano essere equazioni del tipo di quella di Langevin. Nel linguaggio moderno dei processi stocastici, il moto browniano è quello che si genera da un processo unidimensionale di Wiener [40].

Tuttavia, occorre fare una netta distinzione tra il trasporto turbolento ed il moto browniano: innanzi tutto, come detto nel paragrafo precedente, la dinamica del moto dei fluidi è regolata dalle equazioni di Navier-Stokes che sono diretta conseguenza della seconda legge di Newton e pertanto deterministiche, inoltre, osservando un flusso turbolento, si nota che il suo moto è in una certa misura organizzato: esistono cioè strutture coerenti che guidano il trasporto senza che esso appaia completamente casuale. Intuitivamente questo significa che particelle vicine sentiranno un campo di velocità che in una certa misura risulterà simile e pertanto il loro moto non sarà del tutto casuale, così nel tempo il campo che una particella sente ad un certo istante, non sarà del tutto indipendente rispetto all'istante precedente e, di conseguenza, il moto di una particella, a due istanti molto prossimi, non sarà del tutto differente.

Dal punto di vista fisico questo significa che la particella di fluido visita lo spazio delle fasi (l'insieme delle coppie dei valori di posizione e velocità accessibili alla particella) non in modo del tutto casuale, ma passerà da un punto ad un altro (o da un volumetto ad un altro) di detto spazio, in modo coerente con l'equazione dinamica.

Dal punto di vista statistico questo significa che, seppur casuali, i valori di posizione e velocità risultano correlati ad istanti e punti diversi. La correlazione, spaziale e/o temporale, è una caratteristica principale della turbolenza: essa determina infatti la dimensione e la durata delle strutture coerenti. Sebbene esistano correlazioni che si estendano per determinate scale spaziali e temporali, il trasporto turbolento risulta fortemente non predicibile e questo lo rende un fenomeno, per quanto distinto, associato al caos [39]. Così, in accordo con la spiegazione classica, il moto in un flusso turbolento diventa casuale perchè le instabilità intrinseche al flusso amplificano le fluttuazioni delle forze agenti su di esso, le condizioni al contorno, l'agitazione termica ed altri fattori. Questa caratteristica fa sí che il flusso sia fortemente sensibile alle condizioni iniziali e tale sensibilità genera un comportamento caotico,

risultato ben noto sin dagli inizi del XX secolo grazie ad H. Poincaré. Questa vicinanza tra la turbolenza ed il caos deterministico ha stimolato lo sviluppo della teoria dei sistemi dinamici [15].

La teoria dei sistemi dinamici ed il caos appaiono dunque come il naturale approccio allo studio della complessità della turbolenza essendo questa generata da un sistema deterministico. Le leggi che governano l'evoluzione dei processi deterministici risultano essere equazioni alle derivate parziali le quali tuttavia, in certi casi, possono essere risolte solo in maniera approssimata ed un metodo di approssimazione è quello di associare a tali equazioni un insieme di equazioni differenziali ordinarie; ad esempio il metodo detto di Galerkin [15, 46].

Però, come riportato in [15], la caratteristica della turbolenza di possedere un elevatissimo numero di gradi di libertà non può essere colta da gran parte della teoria poichè le equazioni differenziali ordinarie necessarie per lo studio della turbolenza sarebbero un numero elevatissimo: dell'ordine dei suoi gradi di libertà $Re^{9/4}$, dove Re è il numero di Reynolds (1.6). Ciononostante, questo approccio è giustificato, come già detto, dal lavoro di D. Ruelle e F. Takens [108], i quali mostrarono che la maggior parte dei gradi di libertà di un sistema fluidodinamico restano inattivi nella transizione alla turbolenza lasciando che pochi di essi generino una evoluzione complicata e non predicibile del sistema.

Così, le proprietà di sistemi dinamici più semplici di quello delle equazioni di Navier-Stokes, perchè con un minor numero di gradi di libertà, ma che ugualmente evolvono a stati 'turbolenti', possono essere applicate anche alla fluidodinamica: esempi di tali sistemi dinamici sono discussi, ad esempio, in [15, 46].

Tuttavia, un'analisi del livello di casualità della turbolenza svolto attraverso il metodo proposto da P. Gaspard e X.-J. Wang [41] evidenzia che, sebbene sia governata dalle equazioni deterministiche di Navier-Stokes (1.1), nel caso di elevati numeri di Reynolds (cioè infiniti gradi di libertà) essa può essere descritta da un processo stocastico. Pertanto, l'incapacità dei sistemi dinamici di cogliere l'elevato numero di gradi di libertà proprio della turbolenza e l'elevato livello di casualità di questa giustificano l'uso dei metodi stocastici nello studio del trasporto turbolento.

Riassumendo, la persistenza di strutture coerenti per scale spaziali e temporali, diversifica fortemente la dispersione turbolenta dal moto browniano. L'esistenza di tali scale rende ragione del fatto che il trasporto turbolento è una caratteristica dinamica, essendo la turbolenza una proprietà dei flussi e non dei fluidi, poichè, per diretto effetto della correlazione, il moto nello spazio delle fasi risulta coerente in senso statistico con quello determinato dalle equazioni dinamiche. Al contrario, nel caso del moto browniano per il quale vale l'indipendenza della velocità e della posizione di ciascuna particella dal suo stato nell'istante precedente, si esclude ogni effetto dinamico sul moto. Inoltre, come dimostrato da E.A. Novikov [87], la formulazione di

un modello stocastico tale per cui non esista una correlazione temporale delle velocità delle particelle, fornisce risultati inconsistenti con le equazioni di Navier-Stokes. L'inclusione degli effetti dovuti alla dinamica, ottenuti attraverso le correlazioni, permette di cogliere le strutture coerenti osservate nel trasporto turbolento e rende la modellizzazione stocastica della dispersione un argomento di ricerca ancora vivo a cui, con questo lavoro, si è voluto contribuire.

1.3 Esperimenti: in laboratorio o al calcolatore?

Misurare le proprietà dei flussi turbolenti è un'impresa resa difficile dalle caratteristiche stesse della turbolenza, si pensi ad esempio alla marcata casualità. Esistono due possibili approcci allo studio della turbolenza: quello euleriano che studia le caratteristiche del flusso in determinati punti dello spazio e quello lagrangiano che studia il moto delle particelle di fluido. Generalmente, le misure eseguite sono di tipo euleriano e vengono effettuate, nella maggior parte dei casi, per mezzo di anemometri che registrano serie temporali della velocità del vento. L'acquisizione di dati di tipo lagrangiano presenta ulteriori ed evidenti difficoltà, ne è un esempio il caso in cui si vuole studiare il moto di un volumetto di fumo.

Così, nonostante la turbolenza sia un campo di ricerca intrapreso anni prima della meccanica quantistica o la meccanica statistica [70], non esiste ancora la determinazione sperimentale di alcune quantità fondamentali per le teorie ed i modelli, poiché esse risultano affette da una forte variabilità sperimentale, come ad esempio le costanti riguardanti la struttura del flusso [120, 2] o quella della dispersione relativa [114, 93]. In seguito alle difficoltà sperimentali, l'approfondimento della conoscenza delle proprietà della turbolenza passa dunque anche attraverso lo sviluppo tecnologico, in certi casi anche utilizzando tecniche sperimentali sviluppate in altri campi della fisica [39]. Un importante esempio di misure lagrangiane eseguite in laboratorio utilizzando tecniche proprie di altre aree di ricerca è l'esperimento pubblicato nel 2001 da La Porta *et al.* [97]. In questo lavoro gli autori, adattando alla fluidodinamica una tecnica della fisica delle alte energie per il rilevamento della posizione delle particelle in grado di fornire 70000 misure al secondo, hanno misurato l'accelerazione delle particelle di fluido. L'apparato ha generato una turbolenza abbastanza omogenea ma non isotropa. Questa misura ha permesso di verificare la predizione di Heisenberg-Yaglom [45, 144] (basata sulla teoria di A.N. Kolmogorov del 1941 [61]) della varianza delle componenti della accelerazione.

Un'altra tecnica di laboratorio adottata per compiere misure lagrangiane è detta Particle Tracking. Essa consiste nel ricostruire la traiettoria delle particelle utilizzando videocamere in grado di registrare 25 immagini al secondo [112, 93]. La maggiore risoluzione temporale della tecnica adottata

da La Porta *et al.* [97] consente di eseguire misure in flussi turbolenti con un più alto numero di Reynolds.

Tra le misure lagrangiane, eseguite in atmosfera, vengono ancora citate quelle presentate in un articolo del 1982 da S.R. Hanna [43], il quale analizzò i dati ottenuti da un esperimento eseguito nel 1978 rilasciando palloni.

L'esigenza di acquisire conoscenza delle caratteristiche di base della turbolenza ha fatto sì che, in molti casi, gli autori di importanti intuizioni teoriche lo siano stati anche di significativi esperimenti: G.I. Taylor [127], L.F. Richardson [103, 105], S. Corrsin [117], A.A. Townsend [134, 135], J.L. Lumley [119].

Nonostante le difficoltà sperimentali ed i limiti tecnologici, alcune importanti misure per l'attuale sviluppo della teoria della turbolenza risalgono agli inizi del XX secolo: nel 1915 con G.I. Taylor [127] (esperimento citato dallo stesso G.I. Taylor in apertura del suo celebre lavoro del 1921 dal quale prese origine la descrizione statistica della turbolenza lagrangiana [128]), nel 1920 e 1926 con L.F. Richardson [103, 105] (nel lavoro del 1926 [105] vengono dedotti, dai dati sperimentali, risultati teorici sulla dispersione relativa considerati ancora oggi un paradigma della fluidodinamica [84, 114]), nel 1932 con L. Prandtl [98]. Un altro esempio di lavoro sperimentale eseguito con apparecchiature ormai datate, ma ancora citato, è quello di W.H. Snyder e J.L. Lumley del 1971 [119] sulla correlazione temporale della velocità di particelle con inerzia in un flusso turbolento.

Le misure sperimentali sono però affette da incertezze a volte troppo grandi o, nel caso di esperimenti in laboratorio, ottenute a numeri di Reynolds inferiori a quelli atmosferici o marini. Come già visto, il numero di Reynolds in atmosfera è circa $Re \sim 10^8$ [143], oppure, secondo la definizione $Re_\lambda = (15Re)^{1/2}$ [97] dove Re_λ è detto numero di Reynolds di microscala, corrisponde a $Re_\lambda \sim 10^4$. I recenti esperimenti in laboratorio, di misure lagrangiane, sono stati effettuati a numeri di Reynolds $Re_\lambda \sim 70$ [112], $Re_\lambda \sim 100$ [55], $Re_\lambda \sim 104$ [93], $Re_\lambda \sim \sqrt{15 \cdot 63000} \sim 970$ [97].

Gran parte della difficoltà nella comprensione della turbolenza è causata non solo dai limiti sperimentali ma anche dal fatto che non è ancora nota una soluzione delle equazioni di Navier-Stokes in casi generali [139]. Questa difficoltà matematica, dovuta alla nonlinearietà delle equazioni, può essere risolta per mezzo dei calcolatori. Il moderno uso dei calcolatori in fluidodinamica può essere fatto risalire al 1972, anno in cui viene pubblicato l'articolo di S.A. Orszag e G.S. Patterson [92].

Tuttavia, l'idea di risolvere in modo numerico le equazioni differenziali ed in particolare quelle relative alla meteorologia, quindi le equazioni di Navier-Stokes, è di molto precedente, essa risale infatti al 1922 ed è dovuta a L.F. Richardson [104]. Nel libro *Weather Prediction by Numerical Process* [104] L.F. Richardson anticipò i tempi immaginando "una miriade di calcolatori umani al lavoro", alla pari dei moderni calcolatori paralleli [57, 50]. Le idee

di L.F. Richardson guidarono J. von Neumann e J. Charney [26] nei primi utilizzi di ENIAC per fare previsioni meteorologiche [50].

Così, nell'ipotesi accettata che le equazioni di Navier-Stokes siano la legge fisica che regge la fluidodinamica, lo studio delle loro soluzioni si trasforma nell'esecuzione di un esperimento, citando V.I. Arnold [5]:

La matematica è una parte della fisica. La fisica è una scienza sperimentale, parte delle scienze della natura. La matematica è quella parte della fisica in cui le esperienze costano poco.

Così, a fianco degli esperimenti, oggi troviamo le simulazioni numeriche dirette (DNS) delle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes, le quali consentono di eseguire misure certamente più precise di quelle sperimentali anche se, per lo stato attuale dei calcolatori, con numeri di Reynolds non di molto superiori a quelli sperimentali: $Re_\lambda \sim 230$ [147], $Re_\lambda \sim 284$ [12]. Dal 1972 al 2004 il numero di Reynolds è aumentato da $Re_\lambda \sim 35$ [92] a ~ 280 [12].

Lo studio della turbolenza, dal punto di vista lagrangiano, è oggi sviluppato prevalentemente attraverso le simulazioni numeriche dirette, ad esempio [145, 146, 147, 12, 13] e le numerose referenze citate in questi articoli. A. Aref nel 1986 [4] auspicava un passaggio dallo studio euleriano della turbolenza a quello lagrangiano grazie all'aumento della potenza di calcolo con il passare degli anni. Tuttavia è evidente che le simulazioni al computer non possono sostituire l'esperimento, ma diventare un utile strumento alternativo per studiare le proprietà lagrangiane del flusso turbolento [12].

Sebbene le difficoltà per ottenere un flusso con le caratteristiche volute (ad esempio omogeneo ed isotropo) nel caso delle simulazioni numeriche siano minori di quelle sperimentali, è noto lo scontro tra S. Corrsin e A.A. Townsend sulla non isotropia della turbolenza generata da griglia [70], tuttavia, anche in questo caso, la turbolenza non presenta proprietà di isotropia ben definite per questioni numeriche e statistiche [149] (si veda anche l'analisi dei dati ottenuti dalla DNS [12] esposta nel capitolo 5).

Oltre ad aspetti condivisi con gli esperimenti come il basso numero di Reynolds o l'isotropia non preferentemente realizzata, un limite di principio emerge nel caso delle simulazioni numeriche. Alla base dei sistemi complessi c'è la forte dipendenza del sistema dalle condizioni iniziali, la precisione dei dati e dei conti numerici, determinata dalla capacità del calcolatore che risulta comunque finita, riduce l'influenza delle condizioni iniziali: due punti vicini più della soglia di precisione del calcolatore vengono visti come coincidenti e quindi seguire la stessa traiettoria, piuttosto che nel corretto modo complicato. Tuttavia, questo problema di principio sembra non influenzare troppo l'uso dei calcolatori in fluidodinamica poiché se anche ogni traiettoria calcolata non corrisponde all'effettiva traiettoria per tutti gli istanti, questa può essere considerata rappresentativa del moto caotico [4, 138].

Oltre ai limiti tecnologici di fronte ai quali si devono fermare le simulazioni, ma che probabilmente avranno soluzione semplicemente con il passare

degli anni, un serio problema sorge dal punto di vista formativo e di ricerca in seguito al dilagare dell'uso dei calcolatori. Le simulazioni rischiano di diventare semplici esperimenti numerici sempre più dettagliati ma che non portano con loro maggiore conoscenza. Così, la mole di dati ottenuti attraverso le simulazioni si aggiunge a quella dei dati sperimentali senza produrre però altrettanta comprensione del problema [70, 54]. La conoscenza delle conseguenze della turbolenza rischia di divenire una semplice risposta alle domande applicative che in larga misura alimentano questa ricerca a scapito della conoscenza dei meccanismi di base del problema [51, 70, 54, 123, 124].

1.4 Organizzazione del testo

Nel presente lavoro, sarà privilegiato l'approccio lagrangiano, rispetto a quello euleriano, poiché esso consente di cogliere in maniera naturale le caratteristiche della dispersione. Come conseguenza di questo fatto, le equazioni di Navier-Stokes (1.1), definite secondo un approccio euleriano, non costituiscono l'oggetto della ricerca, sebbene il loro ruolo fondamentale nel caratterizzare i flussi sia costantemente evidenziato.

Nel secondo capitolo saranno esposte le caratteristiche generali lagrangiane dei flussi turbolenti. Inoltre, poiché la determinazione di una relazione che legghi tra loro quantità statistiche lagrangiane ed euleriane costituirebbe essa stessa una teoria della dispersione [29], i principali risultati noti in letteratura su questo argomento saranno esposti e particolare attenzione sarà rivolta ad una formula dovuta a D.J. Thomson [132] ed E.A. Novikov [86] che rende i modelli stocastici di dispersione turbolenta adottati in questo lavoro coerenti con le statistiche euleriane. A partire dal risultato di D.J. Thomson, verrà enunciato un teorema nuovo in letteratura. Il capitolo termina con l'esposizione dei principali risultati noti sulla dispersione assoluta e sulla dispersione relativa.

Nel capitolo terzo sarà introdotta l'ipotesi di markovianità per la velocità lagrangiana dei flussi turbolenti e saranno sviluppate le caratteristiche matematiche dei processi che la soddisfano. Nello stesso capitolo, verrà introdotta la particolare classe di modelli stocastici lagrangiani qui adottata e saranno esposte le principali caratteristiche dei modelli che le appartengono.

Nel capitolo quarto verranno approfonditi i modelli di dispersione relativa formulati in un opportuno sistema di riferimento valido in condizioni di turbolenza isotropa e, dopo un'analisi dei modelli esistenti in letteratura, ne verrà proposto uno nuovo.

Nel capitolo quinto saranno riportati alcuni risultati ottenuti dall'analisi dei dati della simulazione numerica delle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes [12], con particolare attenzione alle quantità che consentono di discriminare tra i modelli di dispersione relativa precedentemente discussi.

Capitolo 2

Caratteristiche generali della dispersione turbolenta

Le proprietà dei flussi turbolenti possono essere studiate adottando due distinti approcci: quello in cui si determina un punto di misura e si analizzano le caratteristiche del flusso in quel punto, approccio detto euleriano, quello in cui si segue un volumetto di fluido nel suo moto, approccio detto lagrangiano. Nello studio della dispersione, l'approccio lagrangiano risulta quello naturale.

Sperimentalmente, in genere, è più facile acquisire conoscenza delle quantità euleriane, così, una teoria che metta in relazione le statistiche lagrangiane della dispersione con le proprietà euleriane del flusso turbolento costituirebbe essa stessa una teoria della dispersione [29].

Sebbene sia possibile trascrivere le equazioni euleriane di Navier-Stokes (1.1) in coordinate lagrangiane [29, 83], queste risultano di una maggiore complessità rispetto al caso euleriano, così nessun vantaggio si ottiene dall'analisi della dinamica lagrangiana. Rilevanti risultati, invece, sono stati ottenuti dalla formulazione cinematica del problema [128].

2.1 Caratteristiche lagrangiane della turbolenza

Nel capitolo precedente si è voluto evidenziare la centralità delle equazioni di Navier-Stokes (1.1) nella descrizione della turbolenza. Esse risultano definite per la velocità euleriana in un dato punto ad un dato istante $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Si è evidenziato inoltre che nonostante ciò i flussi turbolenti necessitano di una descrizione statistica, ne segue che la velocità euleriana \mathbf{u} costituisce un campo casuale.

La descrizione lagrangiana consiste nel considerare il moto di una particella di fluido nota la sua posizione iniziale; il moto risulta essere una funzione del tempo e dipendente da un parametro che individua la posizione di partenza della particella.

Sia \mathbf{x} la posizione di una particella di fluido nell'istante iniziale t_0 , allora la sua posizione all'istante t , indicata con $\mathbf{X}(t; \mathbf{x})$, è data dall'integrale della sua velocità $\mathbf{V}(t; \mathbf{x})$ nell'intervallo di tempo trascorso

$$\mathbf{X}(t; \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \int_{t_0}^t \mathbf{V}(t'; \mathbf{x}) dt', \quad (2.1)$$

da cui si ritrova l'identità $\mathbf{X}(t_0; \mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Senza perdere in generalità, la (2.1) può essere riscritta scegliendo $\mathbf{x} = 0$ e $t_0 = 0$

$$\mathbf{X}(t; 0) = \int_0^t \mathbf{V}(t'; 0) dt'. \quad (2.2)$$

La velocità lagrangiana nel punto \mathbf{X} all'istante t coincide con la velocità euleriana nello stesso punto allo stesso istante per cui ([83] p. 529)

$$\mathbf{V}(t; \mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t; \mathbf{x}), t). \quad (2.3)$$

Applicando la (2.3) alle equazioni (2.1-2.2) si ottiene

$$\mathbf{X}(t; \mathbf{x}) = \mathbf{x} + \int_{t_0}^t \mathbf{u}(\mathbf{X}(t'; \mathbf{x}), t) dt', \quad (2.4)$$

$$\mathbf{X}(t; 0) = \int_0^t \mathbf{u}(\mathbf{X}(t'; 0), t) dt', \quad (2.5)$$

dove \mathbf{u} è il vettore velocità che compare nelle equazioni dinamiche di Navier-Stokes (1.1).

Le formule (2.4-2.5) esprimono in maniera formalmente esatta la relazione tra una quantità esclusivamente lagrangiana, la posizione delle particelle, con una esclusivamente euleriana, il campo di velocità del flusso. La non linearità delle equazioni (2.4-2.5) rende impossibile il loro uso nello studio della dispersione, tuttavia, attraverso un'analisi statistica è invece possibile ricavarne utili informazioni.

Come mostrato dalla formula (2.1), nel caso lagrangiano la posizione \mathbf{X} e la velocità \mathbf{V} risultano essere entrambe quantità casuali ed il moto è descritto da una funzione densità di probabilità (PDF) congiunta delle due variabili e condizionata alla posizione iniziale.

La giusta correlazione della velocità ad istanti differenti definisce una transizione tra punti dello spazio delle fasi coerente con la dinamica, conservando una caratteristica del determinismo del processo e determinando l'esistenza delle strutture coerenti. Nel caso lagrangiano le quantità evolvono nel tempo e quindi la struttura che esse determinano preserva le proprie caratteristiche per un intervallo temporale. La funzione di correlazione della velocità in due istanti distinti è la quantità principale con cui stimare la durata di tali strutture coerenti. In generale, il tensore di correlazione è definito

$$\mu_{ij}(t_1, t_2) = \langle V_i(t_1; \mathbf{x}) V_j(t_2; \mathbf{x}) \rangle. \quad (2.6)$$

Il caso in cui la correlazione μ_{ij} risulta essere funzione solo dell'intervallo temporale trascorso $\mu_{ij} = \mu_{ij}(t_2 - t_1)$ è detto stazionario e quando $i = j$ una scala temporale può essere individuata attraverso l'integrale

$$T_i = \int_0^\infty \frac{\langle V_i(t_0 + \tau; \mathbf{x}) V_i(t_0; \mathbf{x}) \rangle}{\langle V_i^2(t_0 + \tau; \mathbf{x}) \rangle^{1/2} \langle V_i^2(t_0; \mathbf{x}) \rangle^{1/2}} d\tau = \int_0^\infty R_{ii}(\tau) d\tau, \quad (2.7)$$

dove T_i è chiamato tempo scala integrale lagrangiano e R_{ii} è detto coefficiente di correlazione.

Nel caso di turbolenza omogena, stazionaria ed isotropa, l'intervallo inerziale definito dalla teoria di Kolmogorov K41 [61, 83, 84, 38] si estende dal tempo di Kolmogorov τ_η (1.7) (intervallo temporale nel quale la viscosità cinematica è dominante) al tempo integrale T_i che, nel caso isotropo, è uguale in ogni direzione $T_L = T_i$, $i = 1, 2, 3$.

Dalla teoria di Kolmogorov K41 si ha che un'importante caratteristica del flusso è data dalla funzione di struttura definita, nel caso euleriano, come la media d'insieme del quadrato della differenza di velocità in due punti allo stesso istante, nel caso lagrangiano, in due istanti diversi lungo la traiettoria della stessa particella. Dall'analisi dimensionale, si ottiene che, nell'intervallo inerziale, la funzione di struttura lagrangiana del secondo ordine è [84]

$$\langle (V_i(t_0 + \tau; \mathbf{x}) - V_i(t_0; \mathbf{x}))^2 \rangle = C_0 \varepsilon \tau \delta_{ij}, \quad \tau_\eta \ll \tau \ll T_i, \quad (2.8)$$

dove ε è il tasso medio di energia dissipata e C_0 la costante universale lagrangiana di Kolmogorov. Non esiste ancora una determinazione sperimentale definitiva del valore di C_0 [2], quello maggiormente riscontrato in letteratura è circa 5, lo stesso stimato dai dati della DNS [12] analizzati nel capitolo 5.

2.2 Relazione tra statistiche euleriane e lagrangiane

Un affascinante oggetto di studio in fluidodinamica è certamente la ricerca di una relazione tra le statistiche euleriane e lagrangiane. La determinazione di questa relazione costituirebbe essa stessa una teoria della dispersione [29], essendo le quantità euleriane maggiormente studiate e determinabili sperimentalmente. Tuttavia, nel quadro della teoria statistica della turbolenza, nessun risultato conclusivo è stato ancora raggiunto e l'assenza di una determinazione di questo legame costituisce a tutt'oggi uno dei principali tasselli mancanti. Il grande interesse attorno a questo argomento è testimoniato dai numerosi lavori pubblicati nel corso degli anni: teorici, ad esempio [28, 30, 71, 69, 63, 129], sperimentali, [42, 44, 43, 112] e numerici [75, 148].

Questa forte attenzione è dovuta al fatto che tale mancanza investe diversi aspetti dello studio della turbolenza, la determinazione di tale relazione

consentirebbe: dal punto di vista sperimentale, di convertire le misure euleriane in quelle lagrangiane; dal punto di vista teorico e modellistico di descrivere il fenomeno della dispersione con un numero finito di equazioni, poichè, come mostrato da T.S. Lundgren [72] le descrizioni probabilistiche delle equazioni di Navier-Stokes sono per loro struttura sottodeterminate e quindi un numero infinito di equazioni è necessario perchè il problema venga risolto.

Sebbene sia plausibile che esista una relazione, magari non unica, che unisca le due statistiche, è estremamente difficile provarla dal punto di vista teorico. I primi tentativi di determinare tale relazione sono stati di carattere operativo.

Nel 1959 S. Corrsin [28] propose una formula che legasse tra loro correlazione temporale lagrangiana e correlazione spazio-temporale euleriana. Questa formula, nota anche come ‘congettura di Corrsin’ o ‘ipotesi di indipendenza’, assume l’indipendenza tra lo spostamento delle particelle e la velocità istantanea del campo [28, 29]. Formalmente l’ipotesi di S. Corrsin è

$$\mu_{ij}(\tau) \rightarrow \int E_{ij}(\Delta\mathbf{x}, \tau)p(\Delta\mathbf{x}, \tau)d^3\Delta\mathbf{x}, \quad (2.9)$$

dove $\mu_{ij}(\tau)$ è la correlazione temporale lagrangiana definita in (2.6), $E_{ij}(\Delta\mathbf{x}, \tau)$ la correlazione spazio-temporale euleriana definita come $E_{ij}(\Delta\mathbf{x}, \tau) = \langle u_i(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, t_0 + \tau)u_j(\mathbf{x}, t_0) \rangle$ e $p(\Delta\mathbf{x}, \tau)$ è la probabilità che una particella faccia un salto $\Delta\mathbf{x}$ nel tempo τ . Come già evidenziato da S. Corrsin stesso [28, 29], tale ipotesi risulta essere corretta solo asintoticamente (nella formula (2.9) esplicitato con una feccia piuttosto che un uguale), cioè per intervalli temporali lunghi $\tau \rightarrow \infty$. Tuttavia, per tempi lunghi la correlazione è ormai nulla e la formula perde valore [83].

Ciò nonostante, questa congettura è stata studiata sperimentalmente [117], con simulazioni cinematiche [64] ed utilizzata come chiusura in lavori teorici verificati poi numericamente attraverso DNS [56, 52]. Un’identica relazione si ottiene nel contesto della teoria statistica di R. Kraichnan denominata Direct Interaction Approximation [63].

La proposta di F.A. Gifford [42] e J.S. Hay e F. Pasquill [44], invece, si fonda sull’ipotesi che la correlazione temporale euleriana e quella lagrangiana coincidano nella loro forma funzionale ma con una diversa scala dei tempi

$$\mu_{ii}(\beta\tau) = E_{ii}(0, \tau), \quad (2.10)$$

dove R_{ii} e E_{ii} sono quelli definiti in precedenza e β è il rapporto tra le scale temporali integrali lagrangiana ed euleriana secondo la definizione (2.7) in entrambi i casi, $\beta = T_L/T_E$. Nel caso euleriano, la scala temporale integrale può essere sostituita con il rapporto tra la scala integrale spaziale (stimata attraverso l’integrale della correlazione spaziale) e la varianza della velocità. La scala spaziale è una misura per sua natura più pertinente a caratterizzare

la turbolenza dal punto di vista euleriano. Il parametro β è stato oggetto di indagine teorica [30, 59] e sperimentale [43, 112]. Il suo valore è atteso essere dell'ordine dell'unità [30]. Recentemente ne è stata data una definizione in termini delle scale dell'intervallo inerziale (piuttosto che quelle integrali) e se ne è studiato il ruolo nei modelli stocastici lagrangiani per la dispersione relativa [79]. I risultati di [79] sono riportati nel paragrafo 3.2.5 e nel capitolo 5 il valore di β della DNS [12] è stato stimato essere $\beta = 0.6$.

L'unico tentativo di affrontare il problema nella sua natura matematica risulta essere, fino a questo momento, quello di J.L. Lumley nella sua tesi di dottorato "Some problems connected with the motion of small particles in a turbulent fluid" del 1957 sotto la guida di S. Corrsin. I risultati di J.L. Lumley, su questo argomento, furono poi esposti in [71, 69].

Nell'articolo [71] J.L. Lumley ripropone la dimostrazione del fatto che, nel caso di un flusso turbolento omogeneo di un fluido incomprimibile, la distribuzione di velocità euleriana ad un punto coincide con quella lagrangiana a tutti gli istanti; questo importante risultato viene nuovamente derivato e discusso anche in [83, 131]. Una diretta conseguenza di notevole importanza è, in particolare, che la varianza della velocità è la stessa nel caso euleriano e lagrangiano e ciò sarà utilizzato in seguito.

Questo risultato non può essere applicato a statistiche lagrangiane a due tempi, come la correlazione ad esempio, tuttavia ne segue direttamente che nel caso di turbolenza omogenea ed eulerianamente stazionaria (le statistiche euleriane ad un punto non dipendono dal tempo) le statistiche lagrangiane a due tempi sono stazionarie, dipendono cioè dall'intervallo di tempo trascorso e non dai due istanti di misura [83]. In conclusione a questo articolo J.L. Lumley delineò un approccio generale per lo studio del problema che poi utilizzò in [69]. Partendo dalla formula (2.4), J.L. Lumley derivò la probabilità che quella identità si realizzi date le statistiche del campo di velocità euleriano, la relazione trovata lega una statistica di tipo lagrangiano associata a \mathbf{X} ad una di tipo euleriano associata a \mathbf{u} . Purtroppo, la relazione che ottiene non è di alcuna utilità pratica.

Infine, la relazione tra la PDF euleriana e quella lagrangiana fu derivata nel 1969 da E.A. Novikov nel caso di un fluido incomprimibile [85], successivamente, nel 1986, per il caso generale [86]. Il risultato esposto in [86] viene ripresentato in [95]. E.A. Novikov mostrò che la densità di probabilità euleriana e lagrangiana sono legate tra loro attraverso una relazione integrale, in particolare la PDF euleriana delle velocità è data dall'integrale della PDF lagrangiana rispetto tutte le possibili posizioni iniziali. Lo stesso tipo di relazione, ma ancor più generale, fu derivata, in maniera indipendente, da D.J. Thomson nel 1987 [132]. Tale relazione consente di formulare modelli stocastici lagrangiani consistenti con le statistiche euleriane, soddisfacendo alla richiesta fisica che un insieme di particelle uniformemente distribuito rimanga tale nel corso del processo. Questa applicazione fu intuata da E.A. Novikov [86] ma uno studio molto più completo è stato svolto

da D.J. Thomson [132].

Qui di seguito studieremo questa relazione per il suo ruolo fondamentale nella classe di modelli stocastici lagrangiani studiati in questo lavoro e tale relazione sarà chiamata formula di Thomson-Novikov.

2.2.1 Formula di Thomson-Novikov

Nel 1987, D.J. Thomson derivò [132] la formula integrale che lega tra loro densità di probabilità euleriana nello spazio delle fasi e la densità di transizione lagrangiana.

Considerando lo spazio delle fasi associato al flusso, sia $g_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t)$ la densità di probabilità congiunta della posizione \mathbf{x} e della velocità \mathbf{u} all'istante t , allora, dalla teoria delle probabilità, si ha che

$$g_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t) = \langle \rho(\mathbf{x}, t) \rangle p_E(\mathbf{u}; t | \mathbf{x}), \quad (2.11)$$

dove $\langle \rho(\mathbf{x}, t) \rangle$ è la PDF marginale delle posizioni e quindi corrisponde alla densità del fluido, mentre $p_E(\mathbf{u}; t | \mathbf{x})$ è la PDF euleriana delle velocità condizionata al punto di misura. Analogamente sia $g(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t)$ la densità di probabilità congiunta delle particelle disperse dal flusso.

Per ogni realizzazione del flusso, qui indicata con w , la PDF nello spazio delle fasi delle particelle sarà

$$g^w(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t | \mathbf{v}) = \int_{s < t} p^w(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t | \mathbf{y}, \mathbf{v}, s) S^w(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s) d^3 \mathbf{y} ds, \quad (2.12)$$

dove $p^w(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t | \mathbf{y}, s)$ è la probabilità che la particella, della realizzazione w , che si trovava in \mathbf{y} con velocità \mathbf{v} nell'istante s , si trovi in \mathbf{x} con velocità \mathbf{u} all'istante t e S^w l'intensità della sorgente di tale realizzazione cioè, la quantità di particelle partite nell'unità di tempo e di volume. L'estensione spaziale della sorgente è funzione anche della velocità iniziale \mathbf{v} delle particelle.

Si vuole che l'insieme di particelle sia, inizialmente, in equilibrio con il flusso e che quindi ogni realizzazione sia mediata pesando ogni condizione iniziale con le condizioni iniziali del flusso. L'intensità della sorgente sarà una frazione della densità del fluido e quindi $S^w(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s) = S(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t) \rho(\mathbf{y}, t) / \langle \rho(\mathbf{y}, t) \rangle$. Mediando la (2.12), nell'insieme di realizzazioni la cui velocità iniziale \mathbf{v} sia quella del flusso \mathbf{u}_E , per la funzione integranda in (2.12) si ottiene

$$\langle p^w S^w \rangle_{v=u_E} = \frac{\langle p^w \rho(\mathbf{y}, s) \rangle_{v=u_E} S(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s)}{\langle \rho(\mathbf{y}, s) \rangle}. \quad (2.13)$$

La probabilità che una particella, scelta in maniera casuale dall'insieme delle realizzazioni del flusso e partita in equilibrio con il fluido, si trovi nel punto \mathbf{x} con velocità \mathbf{u} nell'istante t è

$$p_L(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t | \mathbf{y}, \mathbf{v}, s) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{u} = \frac{\langle p^w \rho(\mathbf{y}, s) \rangle_{v=u_E}}{\langle \rho(\mathbf{y}, s) \rangle_{v=u_E}} d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{u}, \quad (2.14)$$

inoltre, pesando ogni velocità iniziale \mathbf{v} nel punto \mathbf{y} all'istante s con la PDF euleriana delle velocità $g_a(\mathbf{v}; s|\mathbf{y})$, affinché l'insieme di particelle sia in equilibrio con il flusso, si ha

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t) = \int_{s < t} p_L(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t|\mathbf{y}, \mathbf{v}; s) \frac{\langle \rho(\mathbf{y}, s) \rangle_{v=u_E} S(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s)}{\langle \rho(\mathbf{y}, s) \rangle} g_a(\mathbf{v}; s|\mathbf{y}) ds d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{v}, \quad (2.15)$$

che, dall'identità $g_a(\mathbf{y}, \mathbf{v}; s) = \langle \rho(\mathbf{y}, s) \rangle_{v=u_E} g_a(\mathbf{v}; s|\mathbf{y})$ (vera perchè per definizione g_a è la PDF euleriana congiunta), diventa

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t) = \int_{s < t} p_L(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t|\mathbf{y}, \mathbf{v}; s) \frac{g_a(\mathbf{y}, \mathbf{v}; s)}{\langle \rho(\mathbf{y}, s) \rangle} S(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s) ds d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{v}. \quad (2.16)$$

La formula (2.16) fu derivata da D.J. Thomson nel 1987 [132] ed essa lega la densità di probabilità nello spazio delle fasi dei traccianti g con la loro sorgente nello spazio delle fasi $g_a S / \langle \rho \rangle$ e la loro PDF di transizione $p_L(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t|\mathbf{y}, \mathbf{v}; s)$, dove g_a è la funzione di densità della distribuzione delle particelle di fluido che risulta essere la condizione iniziale in senso statistico delle particelle e $S(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s)$ è l'intensità della sorgente nell'unità di tempo e di volume confrontata con la densità media del fluido $\langle \rho(\mathbf{y}, s) \rangle$. Ricapitolando, in tutti gli istanti $s < t$, qualunque sia la condizione iniziale delle particelle essa è forzata ad essere in equilibrio con il flusso essendo ogni stato (\mathbf{y}, \mathbf{v}) pesato statisticamente.

Nel caso di particelle di fluido, o traccianti perfetti, le densità di probabilità congiunte nello spazio delle fasi delle particelle e del fluido saranno le stesse $g = g_a$ [132, 133] e quindi la formula (2.16) diventa

$$g_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t) = \int_{s < t} p_L(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t|\mathbf{y}, \mathbf{v}; s) \frac{g_a(\mathbf{y}, \mathbf{v}; s)}{\langle \rho(\mathbf{y}, s) \rangle} S(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s) ds d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{v}. \quad (2.17)$$

Inoltre, trovandosi per loro natura in equilibrio con il flusso nell'istante iniziale, la PDF congiunta lagrangiana risulta essere

$$p_L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{y}, \mathbf{v}; t, s) = p_L(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t|\mathbf{y}; s) \langle \rho(\mathbf{y}, s) \rangle p_E(\mathbf{v}; s|\mathbf{y}),$$

dove la PDF di transizione è indipendente dalla velocità iniziale \mathbf{v} essendo questa quella peculiare del flusso nel punto \mathbf{y} nell'istante s . Questo fatto è più chiaro se si considera il limite $t \rightarrow s$. Dovendosi trovare in equilibrio con il flusso la PDF di transizione p_L diventa $p_E(\mathbf{u}; s|\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Questo riproduce l'identità: $\dot{\mathbf{x}}_L(t, \mathbf{y}) = \mathbf{v}_L(t, \mathbf{y}) = \mathbf{u}_E(\mathbf{x}_L(t, \mathbf{y}), t)$ con $\mathbf{x}_L(0, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$, dove \cdot_E e \cdot_L sono le quantità euleriane e lagrangiane così come si ottengono dalle equazioni di Navier-Stokes. Questo risultato segue dal fatto che, in un dato punto ed ad un dato istante, la velocità delle particelle coincide con quella del fluido (2.3).

Per quanto riguarda l'intensità della sorgente nel caso di particelle di fluido, ad ogni istante $s < t$ essa risulta essere istantanea ed esattamente

coincidente con la densità media del fluido $S(\mathbf{y}, s) = \delta(s)\langle\rho(\mathbf{y}, s)\rangle$, la (2.17) si riduce alla formula di E.A. Novikov [86, 95]

$$\int \langle\rho(\mathbf{y}, s)\rangle p_L(\mathbf{u}, \mathbf{x}; t|\mathbf{y}) d^3\mathbf{y} = \langle\rho(\mathbf{x}, t)\rangle p_E(\mathbf{u}; t|\mathbf{x}). \quad (2.18)$$

La formula (2.18) è stata derivata da E.A. Novikov per sostituzione dalle definizioni:

$$p_E(\mathbf{u}; t|\mathbf{x}) = \langle\rho(\mathbf{x}, t)\rangle^{-1} \langle\rho(\mathbf{x}, t)\delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_E(\mathbf{x}, t))\rangle,$$

$$p_L(\mathbf{u}, \mathbf{x}; t|\mathbf{y}) = \langle\rho(\mathbf{y}, s)\rangle^{-1} \langle\rho(\mathbf{y}, s)\delta(\mathbf{u} - \mathbf{u}_L(t; \mathbf{y}))\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_L(t; \mathbf{y}))\rangle,$$

considerando i contorni del flusso indipendenti dal moto delle particelle e che

$$\frac{D\mathbf{y}}{D\mathbf{x}} = \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\rho(\mathbf{y}, s)},$$

dove $D\mathbf{y}/D\mathbf{x}$ è lo jacobiano dell'evoluzione lagrangiana di ciascuna traiettoria da \mathbf{y} a \mathbf{x} e viceversa.

Nel caso di un fluido incomprimibile, si ha

$$\frac{D\mathbf{y}}{D\mathbf{x}} = \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\rho(\mathbf{y}, s)} = 1, \quad (2.19)$$

dalla quale $\langle\rho(\mathbf{y}, s)\rangle = \langle\rho(\mathbf{x}, t)\rangle$ e la (2.19) corrisponde all'equazione di continuità in coordinate lagrangiane ([83] p. 527-535). Dalla (2.18) si ottiene

$$\int p_L(\mathbf{u}, \mathbf{x}; t|\mathbf{y}) d^2\mathbf{y} = p_E(\mathbf{u}; t|\mathbf{x}), \quad (2.20)$$

derivata da E.A. Novikov nel 1969 [85].

2.2.2 Cambio di variabili per la formula di Thomson-Novikov

Considerando un generico cambio di variabili per le variabili casuali dinamiche associate al nostro problema definito come $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y}\} \rightarrow \{\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{x}', \mathbf{y}'\}$, tale per cui lo jacobiano della trasformazione di ciascuna variabile sia J_x, J_u, J_y e J_v , allora, l'equazione di continuità (2.19) diventa

$$\frac{D\mathbf{y}'}{D\mathbf{x}'} = \frac{\rho'(\mathbf{x}', t)}{\rho'(\mathbf{y}', s)} = \frac{J_y}{J_x}. \quad (2.21)$$

La PDF g'_a delle nuove variabili aleatorie sarà una funzione che normalizza se integrata rispetto le proprie variabili e quindi

$$\int g'_a(\mathbf{x}', \mathbf{u}'; t) d^3 d\mathbf{x}' d^3 \mathbf{u}' = 1, \quad (2.22)$$

così dalla (2.11) si ha

$$g'_a(\mathbf{x}', \mathbf{u}'; t) = J_x \langle\rho(\mathbf{x}', t)\rangle p'_E(\mathbf{u}'; t|\mathbf{x}'). \quad (2.23)$$

La (2.23) sarà importante nel capitolo 4.

2.2.3 Inversione della formula di Thomson-Novikov

La formula integrale di Thomson-Novikov (2.17) nel caso di particelle di fluido, o traccianti perfetti, può essere vista, dal punto di vista matematico, come un Reproducing Kernel [111, 11]. Essa, cioè, risulta essere una trasformata integrale tale per cui la funzione trasformata è funzionalmente uguale a quella di partenza.

Applicando la teoria dei Reproducing Kernel è possibile quindi invertire, in maniera esatta, la formula (2.17). Questa inversione consente di determinare la PDF di transizione lagrangiana in termini delle basi nello spazio di Hilbert della PDF euleriana congiunta. Questo risultato, costituito dal seguente teorema, è nuovo in letteratura:

Teorema 1 *Sia*

$$g_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t) = \sum_{\ell} g_{\ell}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (2.24)$$

la rappresentazione nello spazio di Hilbert della PDF euleriana nello spazio delle fasi. Allora, se vale la formula (2.17), la PDF lagrangiana è

$$p_L(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t | \mathbf{y}, \mathbf{v}; s) = \sum_{i,j} g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \gamma_{ij} g_j(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s), \quad (2.25)$$

dove

$$\gamma_{ij} \int_{s < t} g_j(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s) g_{\ell}(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s) \frac{S(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s)}{\langle \rho(\mathbf{y}, s) \rangle} d^3 \mathbf{y} d^3 \mathbf{v} ds = \begin{cases} 1 & i = j = \ell \\ 0 & i \neq j; j \neq \ell \end{cases}. \quad (2.26)$$

La dimostrazione segue direttamente dalla sostituzione della (2.25) in (2.17):

$$\begin{aligned} g_a &= \int_{s < t} \sum_{i,j} g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \gamma_{ij} g_j(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s) \frac{S(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s)}{\langle \rho(\mathbf{y}, s) \rangle} \sum_{\ell} g_{\ell}(\mathbf{y}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{y} d^3 \mathbf{v} ds \\ &= \sum_{\ell} \sum_{i,j} g_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \gamma_{ij} \int_{s < t} g_j(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s) g_{\ell}(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s) \frac{S(\mathbf{y}, \mathbf{v}, s)}{\langle \rho(\mathbf{y}, s) \rangle} d^3 \mathbf{y} d^3 \mathbf{v} ds \\ &= \sum_{\ell} g_{\ell}(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t). \end{aligned}$$

Questo risultato consente, nota la PDF euleriana congiunta, di determinare la PDF lagrangiana di transizione e quindi determinare ogni statistica lagrangiana. Esso costituisce l'anello mancante nella teoria statistica della turbolenza. Uno studio approfondito delle conseguenze del teorema 1 consentirebbe di costruire una teoria statistica della dispersione.

2.3 Dispersione assoluta

Si chiama dispersione assoluta la dispersione di una singola particella. I principali risultati si devono a G.I. Taylor [128] il quale, nel 1921, fondò gli attuali studi sulla dispersione.

Definito lo spostamento lagrangiano come

$$\mathbf{Y}(\tau) = \mathbf{X}(t_0 + \tau; \mathbf{x}) - \mathbf{x}, \quad (2.27)$$

le principali caratteristiche della dispersione sono date dalla variazione nel tempo della media e della varianza del vettore \mathbf{Y} . I risultati esposti in questo paragrafo seguono la trattazione svolta nel libro [83].

Dalla (2.1) si ha che la media di \mathbf{Y} è

$$\langle \mathbf{Y}(\tau) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \langle \mathbf{V}(t; \mathbf{x}) \rangle dt, \quad (2.28)$$

e, definita la quantità

$$\mathbf{Y}'(\tau) = \mathbf{Y}(\tau) - \langle \mathbf{Y}(\tau) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \mathbf{V}'(t; \mathbf{x}) dt, \quad (2.29)$$

la varianza è data dal tensore del secondo ordine

$$D_{ij}(\tau) = \langle Y'_i(\tau) Y'_j(\tau) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \langle V'_i(t_1; \mathbf{x}) V'_j(t_2; \mathbf{x}) \rangle dt_1 dt_2. \quad (2.30)$$

Nel caso di turbolenza omogenea e stazionaria, la velocità media euleriana e lagrangiana sono uguali (come dimostrato da J.L. Lumley [71]) e costanti nel tempo e nello spazio, così non si perderà in generalità nel considerare un campo di velocità con media nulla. Inoltre, in questo caso, la funzione di correlazione ed i conseguenti coefficienti di correlazione risultano essere funzioni del tempo trascorso $t_2 - t_1$ e non dei singoli istanti di misura t_1 e t_2 e quindi vale

$$\langle V'_i(t_1; \mathbf{x}) V'_j(t_2; \mathbf{x}) \rangle = \sigma_i \sigma_j R_{ij}(t_2 - t_1), \quad (2.31)$$

dove σ_i indica il valore della varianza per ciascuna componente, noto che le varianze euleriana e lagrangiana, in un punto ed ad un istante, sono uguali [71]. Applicando il seguente cambio di variabili

$$\begin{cases} s = t_2 - t_1 \\ t = \frac{t_1 + t_2}{2} \end{cases}, \quad (2.32)$$

dalla (2.30) si ottiene

$$D_{ij}(\tau) = \sigma_i \sigma_j \int_0^\tau (\tau - s) [R_{ij}(s) + R_{ji}(s)] ds, \quad (2.33)$$

questa formula fu ottenuta da J. Kampé de Fériet nel 1939 [32] nel caso $i = j$ e da G.K. Batchelor nel 1949 [6] nel caso generale.

Dalle formule (2.30) e (2.33) la dispersione quadratica media può essere analizzata, rispettivamente, nei due casi asintotici per τ piccoli e τ grandi.

Quando τ è piccolo allora la (2.4) può essere approssimata con $\mathbf{Y}(\tau) \sim \mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0)\tau$ dove la presenza di \mathbf{u} rende le statistiche dominate dalle quantità euleriane e la (2.30) diventa

$$D_{ij} \sim \langle u'_i(\mathbf{x}, t_0)u'_j(\mathbf{x}, t_0) \rangle \tau^2 = B_{ij}\tau^2, \quad (2.34)$$

e nel caso $i = j$

$$D_{ii} \sim \langle u'_i(\mathbf{x}, t_0)u'_i(\mathbf{x}, t_0) \rangle \tau^2 = \sigma_i^2\tau^2. \quad (2.35)$$

Quando τ è grande allora, dalla trasformazione (2.32), si ha $s \rightarrow \infty$, così, assunto che la funzione di correlazione lagrangiana tenda a zero abbastanza velocemente per $s \rightarrow \infty$, definite le quantità

$$T_{ij} = \int_0^\infty [R_{ij}(s) + R_{ji}(s)]ds < \infty, \quad (2.36)$$

$$S_{ij} = \int_0^\infty [R_{ij}(s) + R_{ji}(s)]sds < \infty, \quad (2.37)$$

si ottiene

$$D_{ij}(\tau) \sim \sigma_i\sigma_j \int_0^\infty (\tau - s)[R_{ij}(s) + R_{ji}(s)]ds = \sigma_i\sigma_j(T_{ij}\tau - S_{ij}), \quad (2.38)$$

da cui

$$D_{ij}(\tau) \sim \sigma_i\sigma_j T_{ij}\tau. \quad (2.39)$$

Nel caso $i = j$ le definizioni (2.36-2.37) diventano

$$T_i = \int_0^\infty R_{ii}(s)ds, \quad (2.40)$$

e

$$\int_0^\infty sR_{ii}(s)ds = S_i, \quad (2.41)$$

e quindi

$$D_{ii}(\tau) \sim 2\sigma_i^2 T_i \tau. \quad (2.42)$$

Poiché la dispersione assoluta è principalmente dovuta ai vortici di scala maggiore, perchè quelli contenenti più energia, allora non ci sono particolari caratteristiche dovute all'esistenza di un intervallo inerziale ed i due casi asintotici analizzati, quindi, ne completano lo studio.

2.3.1 Concentrazione media

Il rilascio di una sostanza in un flusso turbolento è regolato secondo il trasporto che il flusso esegue di ogni volumetto di fluido, ne segue che vengono applicati i risultati discussi precedentemente. Ogni volumetto di fluido conterrà una certa quantità della sostanza immessa nel fluido e quindi ogni volumetto trasporterà una certa concentrazione di tale sostanza. I risultati esposti in questo paragrafo seguono la trattazione svolta nel libro [83].

Sia $\theta(\mathbf{X}, t)$ la concentrazione nel punto \mathbf{X} all'istante t , allora è noto che essa soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u_i \theta)}{\partial X_i} = \kappa \nabla^2 \theta, \quad (2.43)$$

dove κ è la diffusività molecolare. Poichè la concentrazione θ non modifica il campo di velocità allora \mathbf{u} non è funzione di θ e la (2.43) risulta essere un'equazione lineare rispetto θ .

In presenza di un flusso turbolento, gli effetti sul moto prodotti dalla diffusività molecolare sono trascurabili [83, 131], così la (2.43) diventa

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u_i \theta)}{\partial X_i} = 0. \quad (2.44)$$

Dal punto di vista di quanto analizzato sin qui, questo significa che la concentrazione contenuta in un volumetto disperso dal flusso rimane sempre la stessa, in altre parole la concentrazione associata ad ogni punto in moto è costante.

Data una concentrazione iniziale $\theta(\mathbf{X}, t_0) = \theta_0(\mathbf{X})$ allora la soluzione dell'equazione (2.44) al tempo t sarà descritta da un operatore lineare $A(\mathbf{u}_0(\mathbf{X}), t)$, perchè la (2.44) è lineare, tale per cui

$$\theta(\mathbf{X}, t) = A(\mathbf{u}_0(\mathbf{X}), t)\theta_0(\mathbf{X}). \quad (2.45)$$

Essendo \mathbf{u}_0 una quantità casuale ne segue che anche l'operatore A è casuale e definito da ciascuna realizzazione di \mathbf{u}_0 . Allora, la concentrazione media è definita dall'equazione

$$\langle \theta(\mathbf{X}, t) \rangle = \langle A(\mathbf{u}_0(\mathbf{X}), t)\theta_0(\mathbf{X}) \rangle. \quad (2.46)$$

Come caso semplice si consideri quello in cui l'intera sostanza venga rilasciata all'istante t_0 nel punto \mathbf{x} , cioè essa è tutta contenuta in un solo volumetto di fluido. In questo caso allora la concentrazione iniziale θ_0 risulta definita come segue

$$\theta_0(\mathbf{X}) = Q\delta(\mathbf{X} - \mathbf{x}), \quad (2.47)$$

dove Q è la misura della quantità di sostanza immessa nel fluido. Inoltre, poichè la diffusività molecolare è trascurata, la concentrazione associata a questo unico volumetto si conserva per tutti i tempi e quindi

$$\theta(\mathbf{X}, t) = Q\delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}(t; \mathbf{x})), \quad (2.48)$$

dove come in precedenza $\mathbf{X}(t; \mathbf{x})$ è la posizione raggiunta al tempo t dal volumetto che si trovava in \mathbf{x} al tempo t_0 . In questo caso la (2.46) diventa

$$\langle \theta(\mathbf{X}, t) \rangle = \langle A(\mathbf{u}_0(\mathbf{X}), t) \rangle \theta_0(\mathbf{X}), \quad (2.49)$$

poichè θ_0 , essendo fissato, è indipendente e $\langle A(\mathbf{u}_0(\mathbf{X}), t) \rangle$ una funzione del tempo $\langle A(\mathbf{u}_0(\mathbf{X}), t) \rangle = \langle A(t) \rangle$. Poiché mediando la (2.48) si ottiene

$$\langle \theta(\mathbf{X}, t) \rangle = Qp(\mathbf{X}; t|\mathbf{x}), \quad (2.50)$$

noto che $\langle \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}(t; \mathbf{x})) \rangle = p(\mathbf{X}; t|\mathbf{x})$, allora, sostituendo la (2.47) nella (2.49) si ha

$$\langle A(t) \rangle \delta(\mathbf{X} - \mathbf{x}) = p(\mathbf{X}; t|\mathbf{x}). \quad (2.51)$$

Se la concentrazione iniziale θ_0 è un campo arbitrario, allora per la linearità dell'operatore $\langle A(t) \rangle$ è possibile usare il principio di sovrapposizione e quindi ottenere

$$\langle \theta(\mathbf{X}, t) \rangle = \langle A(\mathbf{u}_0(\mathbf{X}), t) \rangle \theta_0(\mathbf{X}) = \int p(\mathbf{X}; t|\mathbf{x}) \theta_0(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}. \quad (2.52)$$

Dalla (2.46) segue che la concentrazione media, nel caso di un rilascio istantaneo e puntuale, è definita dalla densità di probabilità di una particella di fluido che partita dal punto di rilascio nell'istante del rilascio abbia raggiunto il punto di misurazione della concentrazione nell'istante della misurazione.

Nel caso in cui il rilascio sia ancora puntuale ma prolungato nel tempo allora la (2.52) diventa

$$\langle \theta(\mathbf{X}, t) \rangle = \int_{s < t} p(\mathbf{X}; t|\mathbf{x}) S(\mathbf{x}, s) d^3 \mathbf{x} ds, \quad (2.53)$$

dove S è la stima di quantità di sostanza emessa durante il rilascio, in particolare, quindi, il caso del rilascio istantaneo è dato da $S(\mathbf{x}, s) = \theta_0(\mathbf{x}) \delta(s)$.

Si consideri di nuovo l'equazione (2.44) e si consideri per le quantità istantanee di velocità e concentrazione la seguente scomposizione:

$$u_i = u'_i + \langle u_i \rangle, \quad (2.54)$$

$$\theta = \theta' + \langle \theta \rangle, \quad (2.55)$$

dove con $'$ sono indicate le fluttuazioni rispetto al valore medio indicato, invece, con $\langle \cdot \rangle$. Segue, da semplici considerazioni, che la media delle fluttuazioni è nulla altrimenti, mediando le formule (2.54, 2.55) non si verificherebbe un'identità. Così, applicando la scomposizione (2.55) in (2.44) si ottiene

$$\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle u_i \rangle \langle \theta \rangle] = - \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle u'_i \theta' \rangle]. \quad (2.56)$$

Nelle più semplici teorie della diffusione turbolenta, il flusso di concentrazione $S_i = \langle u_i' \theta' \rangle$ viene posto proporzionale al gradiente stesso di concentrazione come segue [83]

$$S_{ij} = -K_{ij} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_j}, \quad (2.57)$$

dove K_{ij} è il tensore della diffusività turbolenta. Nel caso isotropo $K_{ij} = 0, i \neq j$. Infine, si ottiene l'equazione per la diffusione turbolenta

$$\frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} [\langle u_i \rangle \langle \theta \rangle] = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[K_{ij} \frac{\partial \langle \theta \rangle}{\partial x_j} \right]. \quad (2.58)$$

Trattandosi di una teoria della diffusione, il tensore K_{ij} è determinato dalla formula

$$K_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial D_{ij}(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\sigma_i \sigma_j}{2} \int_0^\tau [R_{ij}(s) + R_{ji}(s)] ds, \quad (2.59)$$

dove si è fatto uso della (2.33). Il comportamento asintotico di D_{ij} è stato analizzato nel paragrafo precedente, in particolare, per τ grandi si ottiene un coefficiente di diffusione indipendente dal tempo. Infatti, dalla (2.36) si ha

$$K_{ij} = \frac{\sigma_i \sigma_j}{2} T_{ij}. \quad (2.60)$$

Con questa ultima analisi, si è evidenziato ancora il ruolo svolto dalla dispersione assoluta nello studio della concentrazione media trasportata da un campo di velocità turbolento. Tuttavia, come sarà evidenziato più avanti, per il caso della dispersione relativa, le relazioni del tipo (2.57), dette “flusso-gradiente” non sono sempre valide nel caso della dispersione turbolenta [8, 31, 131]. Inoltre, questo approccio, produce effetti detti di “controgradiente”, nei quali, cioè, si osserva una diffusività (2.57) negativa [116]. Questo evidenzia la differente natura tra il flusso S_i ed il gradiente della concentrazione media $\langle \theta \rangle$ e che quindi, se esiste una proporzionalità questa non può essere assimilata ad un coefficiente di diffusione K_{ij} .

2.4 Dispersione relativa

La dispersione relativa è uno dei più interessanti campi di ricerca in turbolenza poiché essa coinvolge aspetti teorici, modellistici ed applicativi. A differenza della dispersione assoluta, in questo caso, l'esistenza di un intervallo inerziale determina caratteristiche molto importanti. La separazione tra due particelle risulta causata principalmente dai vortici di scala spaziale dell'ordine della separazione tra le particelle, poiché quelli più piccoli sono meno energetici e quelli più grandi responsabili del trasporto di entrambe senza produrre effetti relativi [84]. Per separazioni nell'intervallo inerziale,

quindi, la dispersione è caratterizzata dalle proprietà del flusso a quelle scale. Ne segue che la dispersione turbolenta relativa avviene secondo modalità che riguardano caratteristiche della turbolenza sia lagrangiane che euleriane. Infatti, quando la separazione tra le due particelle è interna all'intervallo inerziale, la correlazione spaziale del campo di velocità (caratteristica euleriana) produce effetti sulla dispersione (proprietà lagrangiana), poiché la velocità di una particella non risulta indipendente dalla velocità dell'altra. Questa caratteristica tipica della dispersione relativa coinvolge anche l'analisi della relazione tra statistiche legrangiane ed euleriane. La dispersione relativa nell'intervallo inerziale sarà, infatti, fortemente influenzata dal rapporto tra le scale di correlazione lagrangiana ed euleriana [79].

Le principali relazioni cinematiche della dispersione relativa si ottengono in modo analogo al caso della dispersione assoluta. Sia

$$\mathbf{r}(t; \mathbf{r}_0) = \mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}_0) - \mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0), \quad (2.61)$$

il vettore separazione tra due particelle partite rispettivamente in \mathbf{x}_0 e $\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}_0$, allora, applicando la formula (2.1) ad entrambe le particelle si ottiene

$$\mathbf{r}(t; \mathbf{r}_0) = \mathbf{r}_0 + \int_{t_0}^t \Delta \mathbf{V}(t'; \mathbf{r}_0) dt', \quad (2.62)$$

dove $\Delta \mathbf{V}(t; \mathbf{r}_0) = \mathbf{V}(t; \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}_0) - \mathbf{V}(t; \mathbf{x}_0)$. Così, in modo analogo al caso della dispersione assoluta, si ottiene

$$\langle (r_i - r_{0i})(r_j - r_{0j}) \rangle = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} \langle \Delta V_i(t_1; \mathbf{r}_0) \Delta V_j(t_2; \mathbf{r}_0) \rangle dt_1 dt_2. \quad (2.63)$$

Tuttavia, a differenza del caso della dispersione assoluta, la funzione integrale evidenzia caratteristiche lagrangiane ed euleriane, infatti

$$\begin{aligned} \langle \Delta V_i(t_1; \mathbf{r}_0) \Delta V_j(t_2; \mathbf{r}_0) \rangle &= \\ &= \langle [V_i(t_1; \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}_0) - V_i(t_1; \mathbf{x}_0)][V_j(t_2; \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}_0) - V_j(t_2; \mathbf{x}_0)] \rangle \\ &= 2\langle V_i(t_1; \mathbf{x}_0) V_j(t_2; \mathbf{x}_0) \rangle - 2\langle V_i(t_1; \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}_0) V_j(t_2; \mathbf{x}_0) \rangle \\ &= 2\sigma_i \sigma_j [\mu_{ij}(t_2 - t_1) - \rho_{ij}(t_2 - t_1)] \end{aligned}$$

dove si è utilizzata la proprietà di indistinguibilità delle particelle e quindi le identità

$$\langle V_i(t_1; \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}_0) V_j(t_2; \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}_0) \rangle = \langle V_i(t_1; \mathbf{x}_0) V_j(t_2; \mathbf{x}_0) \rangle,$$

$$\langle V_i(t_1; \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}_0) V_j(t_2; \mathbf{x}_0) \rangle = \langle V_i(t_1; \mathbf{x}_0) V_j(t_2; \mathbf{x}_0 + \mathbf{r}_0) \rangle,$$

e μ_{ij} e ρ_{ij} sono, rispettivamente, la correlazione temporale lagrangiana di una particella definita in (2.6) e la correlazione temporale tra le due particelle. L'analisi, negli stessi due casi asintotici studiati per la dispersione assoluta, quando $i = j$, fornisce i seguenti risultati.

Nel limite $\tau \rightarrow 0$ la differenza di velocità integranda in (2.63) si può approssimare con $\Delta \mathbf{V}(t_0; \mathbf{x}_0) \sim \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)$ e nel caso $i = j$ si ha

$$\langle (r_i - r_{0_i})^2 \rangle \sim \langle \Delta u_i^2(\mathbf{x}_0, t_0) \rangle \tau^2. \quad (2.64)$$

Nel limite $\tau \rightarrow \infty$ le due particelle diventano indipendenti ed utilizzando un procedimento analogo a quello adottato con la formula (2.30) si ha

$$\langle (r_i - r_{0_i})^2 \rangle \sim 4\sigma_i^2 T_{ii} \tau. \quad (2.65)$$

Tuttavia, sono evidenti gli effetti dovuti alla correlazione spaziale quando le particelle si troveranno nell'intervallo inerziale e questo risulta essere un regime con effetti importanti e quindi non trascurabile. Le caratteristiche generali della dispersione relativa sono esposte, ad esempio, nei lavori: [29, 84, 73, 114, 126]. Nel paragrafo seguente saranno analizzate le caratteristiche della dispersione relativa nell'intervallo inerziale.

2.4.1 L.F. Richardson, G.K. Batchelor e S. Corrsin

La dispersione relativa è ben descritta, nell'intervallo inerziale, dalle intuizioni di L.F. Richardson del 1926 [105]. Le idee di L.F. Richardson furono poi formalizzate da A.M. Obukhov nel 1941 [89] e G.K. Batchelor nel 1950 [7]. In particolare, lo schema che emerge si fonda su due risultati: il primo, detto legge dei 4/3, afferma che sia possibile definire un coefficiente di diffusione turbolenta K proporzionale alla potenza 4/3 della separazione r tra le particelle, il secondo, detto legge di t^3 o legge di Richardson, che la varianza della separazione aumenta nel tempo con la potenza t^3 , dove t è il tempo trascorso.

L.F. Richardson inizia il suo articolo osservando che se l'equazione che descrive la dispersione, nel caso isotropo, è l'equazione di Fick (2.58)

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \langle u_i \rangle \frac{\partial \chi}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial \chi}{\partial x_i} \right), \quad (2.66)$$

dove χ è la densità in atmosfera di una certa sostanza, $\langle u_i \rangle$ la velocità media nelle tre componenti cartesiane e K il coefficiente di diffusione o diffusività, allora è ben chiaro, da risultati sperimentali, che la scala del problema determina il valore di K poiché esso varia da $0.2 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$, nei tubi capillari, a $10^{11} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ nel caso della circolazione generale. Solo nel caso della diffusione molecolare K può essere costante.

Considerata una particella in \mathbf{x}_0 all'istante t_0 , allora essa sarà in $\mathbf{x} + \mathbf{r}$ nell'istante $t_0 + \tau$, così L.F. Richardson, dopo aver modificato il problema all'analisi dell'evoluzione della PDF di r dell'insieme di particelle che costituiscono la sostanza immessa, propone di modificare l'equazione di Fick (2.66) con un coefficiente K funzione di r e, dall'analisi di alcuni dati sperimentali, osserva che

$$K(r) = \alpha r^{4/3}. \quad (2.67)$$

L'equazione per l'evoluzione nel tempo della PDF di \mathbf{r} diventa è

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r_i} \left(K(r) \frac{\partial p}{\partial r_i} \right), \quad (2.68)$$

la cui soluzione risulta essere

$$p(\mathbf{r}; t) = \frac{3}{35\pi^{3/2}} \left(\frac{3}{2} \right)^6 (\alpha t)^{-9/2} \exp \left\{ -\frac{9r^{2/3}}{4\alpha t} \right\}, \quad (2.69)$$

che viene detta PDF di Richardson. Poiché per l'isotropia la PDF in (2.69) è funzione solamente del modulo (ma normalizzata solo se integrata in R^3), allora, la (2.68) può essere riscritta in coordinate sferiche

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(K(r) r^2 \frac{\partial p_s}{\partial r} \right), \quad (2.70)$$

la cui soluzione è

$$p_s(r; t) = 4\pi r^2 p(\mathbf{r}; t), \quad (2.71)$$

che risulta invece normalizzata se integrata in $r \in]0, \infty[$ ed il fattore 4π deriva dall'integrazione degli angoli polare ed azimutale della trasformazione.

La legge dei $4/3$ (2.67) riproduce la proprietà accelerativa della dispersione relativa dovuta ai vortici, l'equazione di evoluzione introdotta risulta fondata su un gradiente non omogeneo. Calcolando la varianza della PDF (2.69) si ottiene come risultato quella che è detta legge di t^3 o legge di Richardson

$$\langle r^2 \rangle = \frac{143}{3} \left(\frac{2}{3} \alpha t \right)^3. \quad (2.72)$$

Nel contesto dell'intervallo inerziale e dell'analisi dimensionale la varianza risulta caratterizzata dal tasso di energia media dissipata ε e da una costante adimensionale universale g da cui si ottiene

$$\langle r^2 \rangle = g\varepsilon t^3, \quad (2.73)$$

dove g è detta costante di Richardson il cui valore misurato varia da 0.06 a 6 [93]. S. Ott e J. Mann nel 2000 [93] hanno ottenuto sperimentalmente $g = 0.5$. Lo stesso valore di g è stato ottenuto anche in un esperimento di turbolenza bidimensionale [55], tuttavia, l'uguaglianza dei due risultati è sorprendente essendo la dinamica sensibilmente differente [93].

Dall'analisi della PDF (2.69) si osserva che, sebbene non sia evidentemente fattorizzabile e quindi le tre componenti del vettore \mathbf{r} non sono variabili aleatorie indipendenti, la correlazione tra componenti diverse è nulla per la simmetria di ciascuna componente rispetto allo zero, infatti:

$$\langle r_i r_j \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_j r_i p(\mathbf{r}; t) dr_i dr_j dr_k$$

$$\begin{aligned}
&= A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_j r_i \exp(-B(r_i^2 + r_j^2 + r_k^2)^{1/3}) dr_i dr_j dr_k \\
&= A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} r_j \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} r_i \exp(-B(r_i^2 + r_j^2 + r_k^2)^{1/3}) dr_i \right\} dr_j dr_k \\
&= 0,
\end{aligned}$$

dove $A = (3/(35\pi^{3/2}))(3/2)^6(\alpha t)^{-9/2}$ e $B = 9/(4\alpha t)$. L'indipendenza statistica è espressa solamente dalla fattorizzabilità della PDF e non dalla correlazione nulla [137]. Tuttavia, variabili indipendenti hanno sempre correlazione pari al prodotto delle medie, ne segue che se una delle due ha media nulla altrettanto lo è la correlazione.

Lo schema proposto da L.F. Richardson è coerente con la teoria di Kolmogorov del 1941 [61], confermata dagli esperimenti [93] e dalle simulazioni numeriche dirette (DNS) [13]. Tuttavia, la descrizione di L.F. Richardson della dispersione relativa non è fisicamente corretta sotto due punti di vista concettualmente distinti: il primo dovuto a G.K. Batchelor nel 1952 [10] ed il secondo a S. Corrsin nel 1974 [31].

G.K. Batchelor osservò ([10] p. 359) che il coefficiente di diffusione è per sua stessa definizione una quantità statistica e pertanto non può essere funzione di quantità ottenute dalla singola realizzazione, ne segue, in particolare, che esso non può essere funzione della separazione della singola coppia. Volendo descrivere ed investigare le proprietà statistiche del processo, G.K. Batchelor propose un coefficiente che fosse ancora funzione della separazione ma intesa come separazione quadratica media, conservando il senso statistico del coefficiente di diffusione. Ciò che ottenne fu un coefficiente di diffusione funzione del tempo come segue

$$K(t) \sim \langle r^2 \rangle^{2/3} \sim t^2. \quad (2.74)$$

L'equazione di evoluzione diventa

$$\frac{\partial p}{\partial t} = K(t) \frac{\partial^2 p}{\partial r_i \partial r_i}, \quad (2.75)$$

la cui soluzione è la gaussiana

$$p(\mathbf{r}; t) = \left[\frac{1}{2\pi\sigma_r^2} \right]^{3/2} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2\sigma_r^2} \right\}, \quad (2.76)$$

dove $\langle \mathbf{r}^2 \rangle = \sigma_r^2$. Tuttavia, sebbene matematicamente più fondata, la soluzione gaussiana di G.K. Batchelor non è sostenuta dalle evidenze sperimentali.

S. Corrsin sviluppò [31] una serie di considerazioni generali sull'applicabilità dell'assunzione che il coefficiente di diffusione sia non omogeneo. Tale assunzione richiede che le scale caratteristiche del meccanismo di trasporto siano piccole confrontate con la distanza sulla quale il gradiente medio

delle quantità trasportate cambi apprezzabilmente. Queste considerazioni possono essere applicate anche al caso della dispersione relativa. Per la natura della dispersione relativa turbolenta, la scala spaziale del meccanismo di trasporto è dell'ordine della separazione delle particelle, essendo queste separate dai vortici di dimensione dell'ordine della loro separazione poiché i vortici maggiori trasportano entrambe senza produrre effetti relativi e quelli di scala minore contengono meno energia e quindi risultano meno efficienti. La formulazione di L.F. Richardson dunque, che definisce un coefficiente di diffusione turbolenta proporzionale alla separazione tra le particelle (2.67), cade immediatamente. Le stesse considerazioni di S. Corrsin erano state evidenziate in precedenza da G.K. Batchelor nel 1950 [8] per evidenziare l'inconsistenza fisica della cosiddetta teoria della lunghezza di mescolamento (Mixing-Length theory) in turbolenza; l'argomento è di nuovo discusso in [131].

Inoltre si può evidenziare che la formulazione di L.F. Richardson del problema della dispersione relativa in un flusso turbolento è indipendente dalle caratteristiche del campo di velocità che invece è il primo artefice del trasporto.

Questa inconsistenza fisica della formulazione di L.F. Richardson, che tuttavia risulta però verificata sperimentalmente e numericamente, rende la dispersione relativa un campo di indagine ancora aperto nei suoi aspetti di base. Un approccio al problema che riproduca le corrette leggi dovute a L.F. Richardson (2.67-2.72) ed allo stesso tempo risulti consistente con le osservazioni di G.K. Batchelor [10] e S. Corrsin [31] è ancora mancante. Questa mancanza ha motivato, assieme ad altre ragioni già esposte, l'approfondimento dei modelli di dispersione relativa rispetto a quelli di dispersione assoluta. La classe dei modelli qui analizzati definisce un coefficiente di diffusione che risulta essere funzione della PDF euleriana delle velocità, soddisfacendo quindi sia all'osservazione di G.K. Batchelor che a quella di S. Corrsin.

2.4.2 Fluttuazioni di concentrazione

La conoscenza delle fluttuazioni di concentrazione risulta, spesso, di importanza pratica maggiore di quella della concentrazione media. Infatti, in certi casi, è possibile che la concentrazione media, di una data sostanza, sia sotto un livello di soglia definito, ad esempio, dalla sua nocività o dalla concentrazione necessaria perchè una certa reazione si attivi, ma possono avvenire fluttuazioni rispetto a questo valor medio tali da superare la soglia definita e/o innescare una reazione.

Considerando la scomposizione (2.55) si osserva che la varianza delle fluttuazioni di concentrazione corrisponde a

$$\langle \theta'^2 \rangle = \langle \theta^2 \rangle - \langle \theta \rangle^2, \quad (2.77)$$

e, poichè $\langle \theta \rangle$ è noto da (2.52-2.53), occorre determinare $\langle \theta^2 \rangle$.

Si consideri, come nel caso precedente (paragrafo 2.3.1), la concentrazione al tempo iniziale t_0 in due punti \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 definita come segue

$$\theta_0(\mathbf{X}_1) = Q_1 \delta(\mathbf{X}_1 - \mathbf{x}_1), \quad (2.78)$$

$$\theta_0(\mathbf{X}_2) = Q_2 \delta(\mathbf{X}_2 - \mathbf{x}_2), \quad (2.79)$$

dove Q_1 e Q_2 rappresentano la misura della concentrazione di una sostanza presente nei volumetti di fluido, centrati rispettivamente in \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 all'istante t_0 , di cui si vuole conoscere la fluttuazione di concentrazione. Trascurando ancora una volta la diffusività molecolare, al tempo t i due volumetti trasportanti quantità Q_1 e Q_2 di sostanza saranno nei rispettivi punti $\mathbf{X}_1(t; \mathbf{x}_1)$ e $\mathbf{X}_2(t; \mathbf{x}_2)$ ciascuno con la stessa quantità di sostanza dell'istante iniziale t_0 e quindi

$$\theta(\mathbf{X}_1, t) = Q_1 \delta(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1(t; \mathbf{x}_1)), \quad (2.80)$$

$$\theta(\mathbf{X}_2, t) = Q_2 \delta(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2(t; \mathbf{x}_2)). \quad (2.81)$$

Considerando l'operatore lineare A (2.45) per ciascun volumetto e mediando si ottiene

$$\langle \theta(\mathbf{X}_1, t) \theta(\mathbf{X}_2, t) \rangle = \langle A[\mathbf{u}_0(\mathbf{X}_1), t] A[\mathbf{u}_0(\mathbf{X}_2), t] \theta_0(\mathbf{X}_1) \theta_0(\mathbf{X}_2) \rangle, \quad (2.82)$$

dove, come in precedenza, la concentrazione iniziale è grandezza indipendente. Dalle formule (2.80-2.81) si ha che la parte a sinistra dell'uguale in (2.82) risulta essere

$$\langle \theta(\mathbf{X}_1, t) \theta(\mathbf{X}_2, t) \rangle = Q_1 Q_2 p(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; t | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_0), \quad (2.83)$$

dove si è fatto uso della definizione

$$\langle \delta(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1(t; \mathbf{x}_1)) \delta(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2(t; \mathbf{x}_2)) \rangle = p(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; t | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_0).$$

Sostituendo le formule (2.78-2.79) nella parte a destra dell'uguale in (2.82) si giunge all'identità

$$\langle A[\mathbf{u}_0(\mathbf{X}_1), t] A[\mathbf{u}_0(\mathbf{X}_2), t] \delta(\mathbf{X}_1 - \mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{X}_2 - \mathbf{x}_2) \rangle = p(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; t | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_0), \quad (2.84)$$

da cui segue che, se Q_1 e Q_2 sono valori arbitrari, per la linearità dell'operatore A è possibile applicare il principio di sovrapposizione e quindi ottenere, in analogia con la formula (2.52),

$$\begin{aligned} \langle \theta(\mathbf{X}_1, t) \theta(\mathbf{X}_2, t) \rangle &= \langle A[\mathbf{u}_0(\mathbf{X}_1), t] A[\mathbf{u}_0(\mathbf{X}_2), t] \theta_0(\mathbf{X}_1) \theta_0(\mathbf{X}_2) \rangle \\ &= \int p(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; t | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_0) \theta_0(\mathbf{x}_1) \theta_0(\mathbf{x}_2) d^3 \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.85)$$

Concludendo, la (2.85) si generalizza al caso di un rilascio non istantaneo con l'espressione

$$\begin{aligned}
& \langle \theta(\mathbf{X}_1, t_1) \theta(\mathbf{X}_2, t_2) \rangle = \\
& = \int_{s_1 < t_1, s_2 < t_2} p(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2; t_1, t_2 | \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, s_1, s_2) \times \\
& \times S(\mathbf{x}_1, s_1) S(\mathbf{x}_2, s_2) d^3 \mathbf{x}_1 d^3 \mathbf{x}_2 ds_1 ds_2, \tag{2.86}
\end{aligned}$$

dove, come in (2.53), S è la stima della quantità di sostanza emessa nell'intera durata del rilascio, in particolare, nel caso di un rilascio istantaneo in entrambe le sorgenti si ha $S(\mathbf{x}_1, s_1) S(\mathbf{x}_2, s_2) = \theta_0(\mathbf{x}_1) \theta_0(\mathbf{x}_2) \delta(s_1) \delta(s_2)$.

Le formule (2.85-2.86) sono state, sostanzialmente, ottenute da G.K. Batchelor nel 1952 [10] e riderivate, ad esempio, in [83, 73, 33]. Come mostrato in [73, 33], nel caso di fluidi incomprimibili, la formula (2.86) conserva la stessa forma se si osserva il processo invertendo la direzione temporale.

Capitolo 3

Metodi stocastici per la modellizzazione della dispersione turbolenta

Le caratteristiche dinamiche di un fenomeno sono il punto di partenza per la formulazione di un modello della realtà fisica, in particolare, quindi, le caratteristiche dell'accelerazione impressa alle particelle di fluido.

Il problema della dispersione di particelle di fluido nei flussi turbolenti è un problema prettamente dinamico, essendo la turbolenza una caratteristica del flusso e non del fluido.

La formulazione di una teoria dinamica in meccanica statistica [14], indipendentemente dal problema fisico analizzato, richiede la conoscenza non solo di informazioni di carattere statistico legate all'elevato numero di particelle considerate, ma anche di informazioni dovute alle caratteristiche statistiche dell'equazione che ne regge il processo.

Come precedentemente evidenziato, la dispersione turbolenta, sebbene appaia come un processo casuale, essa deriva da un'equazione deterministica e per questo presenta correlazioni spaziali e temporali. Conseguentemente, le corrette correlazioni riproducono il moto nello spazio delle fasi in modo coerente con la legge dinamica.

In questo caso, quindi, occorre considerare due aspetti affinché le caratteristiche dinamiche siano riprodotte: il primo è dato dalle caratteristiche statistiche della forza impressa sulle particelle, il secondo dalle caratteristiche della correlazione delle velocità, poiché, sebbene particelle che partono dallo stesso volume nello spazio delle fasi raggiungono volumi diversi (diversamente da problemi non caotici), tuttavia, volumi vicini avranno caratteristiche simili e non risulteranno, invece, completamente indipendenti come avviene nella teoria cinetica dei gas. Entrambi questi aspetti derivano dalla legge dinamica. Solo nel caso di volumi dello spazio delle fasi di dimensioni maggiori della correlazione il moto in detto spazio avverrà tra volumi

indipendenti. La teoria cinetica di L. Boltzmann trascura le correlazioni tra gli stati dinamici che invece, nel caso della dispersione turbolenta, sono necessarie per ben rappresentare gli effetti delle equazioni di Navier-Stokes (1.1).

La considerazione di questi due aspetti rendono la formulazione di un modello valida solamente all'interno di un preciso intervallo.

3.1 L'ipotesi di markovianità

Le caratteristiche dell'accelerazione impressa sulle particelle costituiscono un primo aspetto dinamico da considerare per formulare in modo corretto un modello. Sia $\mathbf{V}(t; \mathbf{x}_0)$ la velocità lagrangiana di una particella di fluido al tempo t , dato che questa si trovava in \mathbf{x}_0 all'istante t_0 ed in $\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0)$ nell'istante t , tale per cui $\mathbf{V}(t_0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)$, dove $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ è la velocità euleriana nel punto \mathbf{x} all'istante t , allora la sua accelerazione $\mathbf{A}(t_0; \mathbf{x}_0)$ è definita come

$$\mathbf{A}(t_0; \mathbf{x}_0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathbf{V}(t_0 + \tau; \mathbf{x}_0) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_0, t_0)}{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta_\tau \mathbf{V}}{\tau}, \quad (3.1)$$

e, come riportato in ([84] p. 368), poiché in turbolenza isotropa la densità di probabilità di $\Delta_\tau \mathbf{V}$ risulta essere universale per τ sufficientemente piccoli, allora le stesse proprietà si avranno anche per la densità di probabilità di $\mathbf{A}(t_0; \mathbf{x}_0)$. Quindi, secondo lo schema dell'analisi dimensionale tipico della teoria di Kolmogorov K41, in regioni spazio-temporali sufficientemente piccole, specificatamente l'intervallo inerziale, la densità di probabilità del campo $\mathbf{A}(t; \mathbf{x}_0)$ risulterà essere stazionaria e dipendente solo da ε e ν , rispettivamente, il tasso medio di energia dissipata e la viscosità cinematica. In particolare, analizzando il tensore di correlazione temporale lagrangiano per il campo di accelerazione definito come

$$B_{ij}(\tau) = \overline{A_i(t; \mathbf{x}_0) A_j(t + \tau; \mathbf{x}_0)} = B_0(\tau) \delta_{ij}, \quad (3.2)$$

dove $\mathbf{A}(t; \mathbf{x}_0) = \mathbf{A}[\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0), t]$, si osserva, dalla (3.1), che esso può essere espresso in termini della funzione di struttura lagrangiana del secondo ordine $D^{(L)}$ (2.8) ([84] p. 369-370):

$$B_0(\tau) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\tau^2} D^{(L)},$$

da cui risulta

$$B_0(\tau) = D_0 \varepsilon / \tau, \quad \tau_\eta \ll \tau \ll T_L. \quad (3.3)$$

Ricordando la relazione che lega il tempo di Kolmogorov τ_η ed il numero di Reynolds (1.8), il coefficiente di correlazione nell'intervallo inerziale risulta

$$\frac{B_0(\tau)}{B_0(0)} = \frac{a(\tau/\tau_\eta)}{a_0} = \frac{D_0}{a_0} \tau^{-1} \tau_\eta = \frac{D_0 L}{a_0 \sigma} \tau^{-1} Re^{-1/2}, \quad (3.4)$$

cioè, direttamente proporzionale a τ_η e, quindi, inversamente proporzionale a Re . Così dalla (3.4) segue che nell'intervallo inerziale per numeri di Reynolds molto grandi ($Re \rightarrow \infty$) le accelerazioni di una particella al tempo t ed al tempo $t + \tau$ risultano essere praticamente decorrelate, sebbene le velocità, invece, risultino correlate in modo non trascurabile fino ad intervalli temporali maggiori del tempo scala lagrangiano T_L . Questa differenza è spiegata dal fatto che l'accelerazione lagrangiana è determinata in larga parte dalle scale più piccole del moto mentre la velocità da quelle più grandi ([84] p. 370). Quindi, la correlazione temporale dell'accelerazione lagrangiana si estende per una scala di tempo dell'ordine di quella di Kolmogorov τ_η , evidenziando il fatto che essa è generata dalla viscosità ([84] p. 368-374).

In altre parole, questo significa che lo stato dinamico del sistema in due istanti t e $t + \delta s$ con $\delta s \gg \tau_\eta$ è determinato da due quantità statisticamente indipendenti.

La formula (3.4) suggerisce quindi che, per intervalli temporali maggiori di quello di Kolmogorov τ_η e quindi per particelle fuori dall'intervallo viscoso, si può ipotizzare l'indipendenza tra le forzanti in due distinti istanti di tempo, t e $t + \delta s$ con $\delta s \gg \tau_\eta$, concludendo che la velocità all'istante $t + \delta s$ dipende solamente dallo stato del sistema all'istante t . Inoltre, per numeri di Reynolds molto grandi ($Re \rightarrow \infty$) l'estensione dell'intervallo viscoso diventa trascurabile.

Si consideri l'ordinaria equazione differenziale ([58] p. 75-76)

$$\frac{du}{dt} = a(t, u),$$

o nella sua forma integrale

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t a(s, u(s)) ds,$$

e sia la funzione $u(t) = u(t; u_0, t_0)$ una sua soluzione che soddisfa la condizione iniziale $u(t_0) = u_0$. In generale, le soluzioni rispettano la proprietà di evoluzione

$$u(t; u_0, t_0) = u(t; u(s; u_0, t_0), s), \quad (3.5)$$

per tutti gli istanti $t_0 \leq s \leq t$. La (3.5) esprime il fatto che il futuro, $u(t)$, è determinato completamente dal presente $u(s)$ ed il passato, u_0 , interviene nella misura in cui influenza il presente.

Considerata una discretizzazione dell'asse dei tempi per cui $s - t_0 = t - s = \delta s \gg \tau_\eta$, si ottiene che all'istante t la velocità u risulta determinata solamente da ciò che è accaduto ad un solo istante precedente, perchè, come già detto, le accelerazioni in due istanti separati $\delta s \gg \tau_\eta$ risultano costituire due processi statisticamente indipendenti. Un processo che soddisfa questa proprietà è detto ad 'incrementi indipendenti' e, con la terminologia dei metodi stocastici, questo postulato, o assunzione, è detto ipotesi di

markovianità. Quindi si dirà che la velocità delle particelle di fluido in un flusso turbolento costituisce un processo stocastico markoviano. In particolare, poiché l'ipotesi di markovianità riguarda la velocità, la dispersione turbolenta risulta essere approssimata da un processo markoviano del primo ordine.

L'ipotesi markovianità è stata derivata da argomenti dimensionali e non direttamente dalle equazioni di Navier-Stokes (1.1), tuttavia, l'approssimazione markoviana è supportata anche da uno studio più approfondito delle caratteristiche dell'accelerazione delle particelle [20].

Gli incrementi indipendenti costituiscono la parte aleatoria del processo, infatti, essendo ciascuno indipendente dai precedenti, essi risultano indeterminabili per mezzo dell'informazione nota. La loro determinazione allora avviene attraverso l'estrazione di un numero casuale da una densità di probabilità ad ogni istante di osservazione. La scelta di questa densità di probabilità cade generalmente su una gaussiana e costituisce il cosiddetto processo di Wiener, o rumore bianco.

3.1.1 Il processo di Wiener

Il processo di Wiener $W = \{W_t, t \leq 0\}$ è definito come un processo gaussiano ad incrementi indipendenti con media nulla e varianza $Var(W_t - W_s) = t - s$ per $0 \leq s \leq t$ ([58] p. 40)

$$E(W_t) = 0, \quad E((W_t - W_s)^2) = t - s. \quad (3.6)$$

Questo processo è stato proposto da N. Wiener, a partire dal 1921 [140], come descrizione del moto browniano [40].

Poiché si vuole, per mezzo del processo di Wiener, rappresentare una funzione soluzione di una equazione differenziale allora, risulta interessante analizzare la continuità e la derivabilità della funzione ottenuta con un tale processo ed un parametro temporale t continuo.

Per verificare la continuità della funzione generata da un processo stocastico continuo nel tempo $W = \{W_t, t \in T\}$, esiste un criterio dovuto a A.N. Kolmogorov ([58] p. 39). Questo criterio richiede l'esistenza di costanti positive α , β , C e h tali per cui

$$E(|W_t - W_s|^\alpha) \leq C|t - s|^{1+\beta}, \quad t, s \in T, \quad (3.7)$$

con $|t - s| \leq h$. Nel caso del processo di Wiener $W = \{W_t, t \in T\}$, applicando le caratteristiche precedenti dovute alla sua natura gaussiana, si ha

$$E(|W_t - W_s|^4) = 3|t - s|^2, \quad t, s \in T, \quad (3.8)$$

pertanto il processo di Wiener produce, quasi sicuramente, una funzione continua.

La derivabilità può essere analizzata studiando la limitatezza, o meno, di variazioni limitate in un intervallo di tempo finito ([58] p. 72-74). Si consideri innanzi tutto un intervallo $a \leq t \leq b$ suddiviso in sottointervalli $[t_k, t_{k+1}]$ equispaziati di lunghezza $\delta = 2^{-n}(b-a)$, dove $\{t_k = a + k2^{-n}(b-a), k = 1, 2, \dots, 2^n\}$. Inoltre, si consideri la quantità

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{2^n-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - (b-a) \\ &= \sum_{k=0}^{2^n-1} [\Delta_k^2 - 2^{-n}(b-a)] \end{aligned} \quad (3.9)$$

dove $\Delta_k^2 = (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2$ ed è stato utilizzato il risultato $\sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-n}(b-a) = 2^n 2^{-n}(b-a) = b-a$. La media di S_n sarà nulla per le proprietà del processo di Wiener sopraesposte, infatti

$$E(S_n) = \sum_{k=0}^{2^n-1} \{E(\Delta_k^2) - 2^{-n}(b-a)\} \quad (3.10)$$

$$= \sum_{k=0}^{2^n-1} \{(t_{k+1} - t_k) - 2^{-n}(b-a)\} \quad (3.11)$$

$$= \sum_{k=0}^{2^n-1} \{2^{-n}(b-a) - 2^{-n}(b-a)\} \quad (3.12)$$

$$= 0, \quad (3.13)$$

nel passaggio dalla (3.10) alla (3.11) si è fatto uso della varianza del processo di Wiener (3.6). La media quadratica di S_n sarà

$$E(S_n^2) = E\left(\left\{\sum_{k=0}^{2^n-1} [\Delta_k^2 - 2^{-n}(b-a)]\right\}^2\right) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} &= E\left(\sum_{k=0}^{2^n-1} (\Delta_k^2 - 2^{-n}(b-a))^2\right) + \\ &+ E\left(2 \sum_{k=0}^{2^n-1} [\Delta_k^2 - 2^{-n}(b-a)][\Delta_{k+1}^2 - 2^{-n}(b-a)]\right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$= \sum_{k=0}^{2^n-1} (E(\Delta_k^4) - 2^{-n+1}(b-a)E(\Delta_k^2) + 2^{-2n}(b-a)^2) \quad (3.16)$$

$$= \sum_{k=0}^{2^n-1} 2^{-2n+1}(b-a)^2 \quad (3.17)$$

$$= 2^{-n+1}(b-a)^2, \quad (3.18)$$

dove si osserva che $S_n \rightarrow 0$ in media quadratica per $n \rightarrow \infty$. Nell'ottenere la (3.18) si è tenuto conto del fatto che nella (3.15) la somma dei doppi prodotti risulta essere nulla poiché $E(\Delta_k^2) = E(\Delta_{k+1}^2) = 2^{-n}(b-a)$ e che per la caratteristica propria di indipendenza degli incrementi $E(\Delta_k^2 \Delta_{k+1}^2) = E(\Delta_k^2)E(\Delta_{k+1}^2) = 2^{-2n}(b-a)^2$. Successivamente, dalla (3.16) alla (3.17), è stata utilizzata la relazione $E(\Delta_k^4) = 3(E(\Delta_k^2))^2$, già usata in (3.7-3.8).

Concludendo, risulta verificato il seguente il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2^n-1} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 = b - a, \quad (3.19)$$

da cui

$$b - a \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq k \leq 2^n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| \sum_{k=0}^{2^n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}|, \quad (3.20)$$

e poiché per la continuità vale

$$\max_{0 \leq k \leq 2^n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| \rightarrow 0,$$

allora

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} |W_{t_{k+1}} - W_{t_k}| \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty. \quad (3.21)$$

Così, sapendo che $(b-a)^{-1} \sum_{k=0}^{2^n-1} \delta = 1 < \infty$, e che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n(n+1)) = 1$ è convergente mentre la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha$ risulta esserlo per $\alpha > 1$ e divergente quando $0 \leq \alpha \leq 1$, ne segue che $W_{t+\delta} - W_t \sim \sqrt{\delta}$ e quindi

$$\frac{W_{t+\delta} - W_t}{\delta} \sim \frac{1}{\sqrt{\delta}} \rightarrow \infty, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.22)$$

da cui si conclude che il processo di Wiener sebbene generi funzioni continue rispetto al parametro t queste risultano essere, quasi sicuramente, non derivabili.

3.1.2 L'equazione di Chapman-Kolmogorov

L'ipotesi di markovinità per la velocità nell'intervallo inerziale esprime il fatto che l'accelerazioni del sistema in due istanti diversi, t e $t + \delta s$ con $\delta s \gg \tau_\eta$, risultano essere due quantità statisticamente indipendenti e la velocità, in ciascun istante, dipendere solamente dalla velocità all'istante precedente. In questo caso allora, data la sequenza temporale $t_n > t_{n-1} > \dots > t_0$ la densità di probabilità della velocità avrà la seguente proprietà:

$$p(u_n; t_n | u_{n-1}; t_{n-1} \dots u_0; t_0) = p(u_n; t_n | u_{n-1}; t_{n-1}), \quad (3.23)$$

che esprime, formalmente, l'ipotesi di markovianità.

Dalla teoria delle probabilità si ha che la densità marginale risulta definita come:

$$\begin{aligned} p(u_n; t_n) &= \int du_{n-1} p(u_n, u_{n-1}; t_n, t_{n-1}) \\ &= \int du_{n-1} p(u_n; t_n | u_{n-1}; t_{n-1}) p(u_{n-1}; t_{n-1}), \end{aligned}$$

e, nel caso di densità condizionate,

$$\begin{aligned} p(u_n; t_n | u_{n-2}; t_{n-2}) &= \int du_{n-1} p(u_n, u_{n-1}; t_n, t_{n-1} | u_{n-2}; t_{n-2}) \\ &= \int du_{n-1} p(u_n; t_n | u_{n-1}, u_{n-2}; t_{n-1}, t_{n-2}) \times \\ &\quad \times p(u_{n-1}; t_{n-1} | u_{n-2}; t_{n-2}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Così, inserendo l'ipotesi di markovianità (3.23) nella (3.24) si ottiene

$$p(u_n; t_n | u_{n-2}; t_{n-2}) = \int du_{n-1} p(u_n; t_n | u_{n-1}; t_{n-2}) p(u_{n-1}; t_{n-1} | u_{n-2}; t_{n-2}), \quad (3.25)$$

detta equazione di Chapman-Kolmogorov. L'equazione (3.25) ha nella formula (3.5) il suo analogo deterministico, infatti essa esprime il caso degenerare nel quale $p(u; t | u_0; t_0) = \delta(u - u(t; u_0, t_0))$, dove δ è la delta di Dirac ([58] p. 76).

Come è evidente dalla derivazione, ogni processo markoviano soddisfa l'equazione di Chapman-Kolmogorov (3.25), mentre non è vero che ogni processo che soddisfi la (3.25) sia un processo markoviano.

L'equazione di Chapman-Kolmogorov (3.25) risulta essere l'equazione principale nei processi stocastici markoviani. Essa tuttavia, espressa in forma integrale, non consente di estrarre ulteriori informazioni oltre alla stessa markovianità. E' possibile ricavare una versione differenziale della (3.25) detta equazione differenziale di Chapman-Kolmogorov che, di fatto, risulta essere una Master Equation, cioè un'equazione di evoluzione della densità di probabilità ([40] p. 48-51).

Data una generica funzione $f(\mathbf{z})$ l'evoluzione temporale del suo valor medio sarà espressa come

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}; t | \mathbf{y}; s) \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) [p(\mathbf{x}; t + \Delta t | \mathbf{y}; s) - p(\mathbf{x}; t | \mathbf{y}; s)] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\Delta t} \int d\mathbf{x} d\mathbf{z} f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}; t + \Delta t | \mathbf{z}; t) p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; s) \right. \\ &\quad \left. - \int d\mathbf{z} f(\mathbf{z}) p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; s) \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

dove nella seconda uguaglianza si è fatto uso dell'equazione (3.25). Sviluppando in serie di Taylor la funzione f nell'intorno di $\mathbf{x} = \mathbf{z} + d\mathbf{x}$ si ottiene

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{z}) + \sum_i \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} (x_i - z_i) + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{z})}{\partial z_i \partial z_j} (x_i - z_i)(x_j - z_j),$$

che, inserita nella (3.26), fornisce

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle f \rangle}{\partial t} = & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}| < \varepsilon} d\mathbf{x} d\mathbf{z} p(\mathbf{x}; t + \Delta t | \mathbf{z}; t) p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; s) \times \right. \\ & \times \left[\sum_i \frac{\partial f(\mathbf{z})}{\partial z_i} (x_i - z_i) + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(\mathbf{z})}{\partial z_i \partial z_j} (x_i - z_i)(x_j - z_j) \right] \\ & + \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}| < \varepsilon} d\mathbf{x} d\mathbf{z} f(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}; t + \Delta t | \mathbf{z}; t) p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; s) \\ & + \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{z}| \geq \varepsilon} d\mathbf{x} d\mathbf{z} f(\mathbf{z}) p(\mathbf{x}; t + \Delta t | \mathbf{z}; t) p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; s) \\ & \left. - \int d\mathbf{x} d\mathbf{z} f(\mathbf{z}) p(\mathbf{x}; t + \Delta t | \mathbf{z}; t) p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; s) \right\}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Definendo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\mathbf{z}-\mathbf{y}| < \varepsilon} d\mathbf{z} (z_i - y_i) p(\mathbf{z}; t + \Delta t | \mathbf{y}; t) = A_i(\mathbf{y}, t) + O(\varepsilon); \quad (3.28)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\mathbf{z}-\mathbf{y}| < \varepsilon} d\mathbf{z} (z_i - y_i)(z_j - y_j) p(\mathbf{z}; t + \Delta t | \mathbf{y}; t) = B_{ij}(\mathbf{y}, t) + O(\varepsilon); \quad (3.29)$$

e

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} p(\mathbf{z}; t + \Delta t | \mathbf{y}; t) / \Delta t = W(\mathbf{z} | \mathbf{y}, t), \quad |\mathbf{z} - \mathbf{y}| > 0; \quad (3.30)$$

ed inoltre, essendo $f(\mathbf{z})$ una funzione generica, dalla (3.27) integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; t_0)}{\partial t} = & - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} [A_i(\mathbf{z}, t) p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; t_0)] \\ & + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} [B_{ij}(\mathbf{z}, t) p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; t_0)] \\ & + \int d\mathbf{x} [W(\mathbf{z} | \mathbf{x}, t) p(\mathbf{x}; t | \mathbf{y}; t_0) - W(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t) p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; t_0)] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dalla definizione (3.30) si osserva che la funzione W descrive i possibili salti e quindi le discontinuità nel tempo della variabile aleatoria \mathbf{z} , tuttavia,

nel caso di un processo continuo, essa sarà nulla sempre eccetto quando $\mathbf{z} = \mathbf{y}$. Il coefficiente \mathbf{A} (3.28) è chiamato *drift* e descrive il passaggio di stato in media mentre \mathbf{B} (3.29), detto *ampiezza di rumore*, stima lo sparpagliamento attorno alla media.

Infine, si possono definire in generale processi stocastici continui retti dall'equazione

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; t_0)}{\partial t} = & - \sum_i \frac{\partial}{\partial z_i} [A_i(\mathbf{z}, t) p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; t_0)] \\ & + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_j} [B_{ij}(\mathbf{z}, t) p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; t_0)], \end{aligned} \quad (3.32)$$

detta equazione di Fokker-Planck e nel caso di processi discontinui dall'equazione

$$\frac{\partial p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; t_0)}{\partial t} = \int d\mathbf{x} [W(\mathbf{z} | \mathbf{x}, t) p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; t_0) - W(\mathbf{x} | \mathbf{z}, t) p(\mathbf{z}; t | \mathbf{y}; t_0)], \quad (3.33)$$

dove i coefficienti \mathbf{A} e \mathbf{B} sono considerati sempre nulli poiché, altrimenti, risulterebbero indeterminati nei punti di discontinuità.

3.1.3 Equazioni differenziali stocastiche

A fianco dell'approccio appena descritto, che si fonda sull'equazione di Chapman-Kolmogorov (3.25) e la sua versione differenziale (3.31), esiste quello che considera l'idea di sostituire le ordinarie equazioni differenziali che regolano le relazioni cinematiche delle particelle di fluido con le analoghe stocastiche, o viceversa, considerare le ordinarie equazioni differenziali come equazioni differenziali stocastiche degeneri, cioè prive di rumore. Questa sostituzione può avvenire sostanzialmente in due modi differenti: nel primo introducendo coefficienti o valori iniziali dipendenti da variabili aleatorie o forzanti date date un processo stocastico regolare e queste sono dette 'Equazioni Differenziali Random' ([58] p. 103), ad esempio

$$\frac{dx}{dt} = a(\omega)x + b(t, \omega),$$

dove ω è una variabile aleatoria e la forzante b è intesa essere continua in t . La soluzione di tali equazioni, per una condizione iniziale $x_0(\omega)$, sarà

$$x(t, \omega) = e^{a(\omega)t} \left(x_0(\omega) + \int_0^t e^{-a(\omega)s} b(s, \omega) ds \right),$$

che risulta a sua volta una funzione differenziabile in t e quindi, le Equazioni Differenziali Random hanno come soluzione funzioni derivabili ([58] p. 103).

Nel secondo modo si introduce invece come forzante un processo di Wiener. Così si ha un'equazione del tipo

$$\frac{dX_t}{dt} = -aX_t + b\xi_t, \quad (3.34)$$

detta equazione di Langevin ed equazioni differenziali di questo tipo si possono scrivere simbolicamente come differenziali stocastici espressi nella forma

$$dX_t = -aX_t dt + b\xi_t dt, \quad (3.35)$$

ed in realtà intese come equazioni integrali

$$X_t = X_{t_0} - \int_{t_0}^t aX_s ds + \int_{t_0}^t b\xi_s ds. \quad (3.36)$$

Equazioni di questo tipo sono largamente utilizzate in diversi campi scientifici e sono dette equazioni differenziali stocastiche (SDE) [136, 137, 40, 58, 91].

Formalmente, le equazioni differenziali stocastiche (3.35) possono essere generalizzate nella forma

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)\xi_t dt, \quad (3.37)$$

e così l'equivalente espressione integrale

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s)ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s)\xi_s ds, \quad (3.38)$$

o in modo analogo

$$X_t = X_{t_0} + \int_{t_0}^t a(X_s)ds + \int_{t_0}^t b(s, X_s)dW_s. \quad (3.39)$$

L'integrale

$$I = \int_{t_0}^t b(s, X_s)dW_s, \quad (3.40)$$

è detto integrale stocastico ([58] p. 99-102). Sebbene scritto come un ordinario integrale contiene in se una marcata differenza con gli integrali del calcolo classico. Esso non può essere interpretato come un ordinario integrale di Riemann o di Lebesgue poiché, come mostrato in precedenza, il rumore di Wiener non è una funzione derivabile, non vale cioè $dW_t/dt = \xi_t$. Inoltre, il processo di Wiener non possiede neppure variazioni limitate in ogni intervallo chiuso temporale, $dW_t \rightarrow \infty$ (3.22), pertanto non può essere inteso neppure come integrale di Riemann-Stieltjes ([58] p. 76; 41-42; 70-71).

Suddiviso l'intervallo $[t_0, t]$ in istanti tali che $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t$, allora nell'istante temporale di valutazione dell'integrale t_j la funzione b potrà essere stimata nel punto \tilde{X}_t definito $X_{t_j} \leq \tilde{X}_j \leq X_{t_{j+1}}$ dove in generale

$$\tilde{X}_j = (1 - \lambda)X_{t_j} + \lambda X_{t_{j+1}}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1,$$

e l'integrale (3.40) stimato in media quadratica espresso nella forma discretizzata

$$I_n(\lambda) = \sum_{j=1}^n b(t_j; (1 - \lambda)X_{t_j} + \lambda X_{t_{j+1}}) \{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\} \quad (3.41)$$

$$= \sum_{j=1}^n b(t_j; X_{t_j} + \lambda dX) \{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\}, \quad (3.42)$$

con $dX = X_{t_{j+1}} - X_{t_j}$. Una trattazione generale di questo tipo evidenzia che esistono infiniti modi di stimare un integrale stocastico, tanti quanti sono i valori di λ . Da un punto di vista pratico però è altrettanto evidente che i casi maggiormente interessanti per una applicazione in fisica sono quelli per $\lambda = 0$ e $\lambda = 1/2$. Nel primo caso, $\lambda = 0$, la (3.42) diventa

$$I_n(0) = I_I = \sum_{j=1}^n b(t_j; X_{t_j}) \{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\}, \quad (3.43)$$

ed è detto integrale di Ito [58], proposto da K. Ito nel 1942 [53], nel secondo caso, $\lambda = 1/2$,

$$I_n(1/2) = I_S = \sum_{j=1}^n b\left(t_j; \frac{X_{t_j} + X_{t_{j+1}}}{2}\right) \{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\}, \quad (3.44)$$

detto integrale di Stratonovich [58], proposto da R.L. Stratonovich nel 1966 [121].

Sviluppando in serie di Taylor la funzione b si ha

$$b(t_j; X_{t_j} + \lambda dX) = b(t_j; X_{t_j}) + \lambda \frac{db}{dX_{t_j}} dX, \quad (3.45)$$

e valutando dX attraverso l'eq.(3.37) si ottiene

$$\begin{aligned} I_n(\lambda) &= \sum_{j=1}^n b(t_j; X_{t_j}) \{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\} + \\ &+ \lambda \sum_{j=1}^n \frac{db}{dX_{t_j}} dX \{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\} + \\ &+ \lambda \sum_{j=1}^n \frac{d^2b}{dX_{t_j}^2} dX^2 \{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\}^2. \end{aligned} \quad (3.46)$$

La formula (3.46) costituisce una regola per legare tra loro diverse stime dell'integrale stocastico (3.40). Inoltre, osservando che per $dt = t_{j+1} - t_j \rightarrow 0$ vale $dt\{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\} \sim O(dt^{3/2})$ e $\{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\}^2 \sim O(dt)$ se ne conclude che è possibile trascurare il termine dato dalla seconda sommatoria e quindi, in particolare, si avrà che il metodo di Ito e quello di Stratonovich sono legati dalla relazione

$$I_S = I_I + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t b \frac{db}{dX_s} ds. \quad (3.47)$$

Quindi, dall'equazione (3.47) si osserva che: data una equazione differenziale stocastica del tipo (3.37) e risolta attraverso il calcolo di Ito (3.43), la sua soluzione risulta essere la medesima dell'equazione

$$dX_t = \left[a + \frac{1}{2} b \frac{db}{dX_t} \right] dt + b dW_t,$$

risolta attraverso il calcolo di Stratonovich (3.44). In modo analogo, la soluzione dell'equazione (3.37) ottenuta attraverso il calcolo di Stratonovich (3.44) corrisponde alla soluzione dell'equazione

$$dX_t = \left[a - \frac{1}{2} b \frac{db}{dX_t} \right] dt + b dW_t,$$

risolta attraverso il calcolo di Ito (3.43).

Il limite in media quadratica della (3.46) per una generica funzione $h(t, X_t)$ fornisce la stima dell'integrale stocastico di funzioni continue

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t h(s, X_s) ds &= \sum_{j=1}^n h(t_j; X_{t_j}) \{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\} + \\ &+ \lambda \sum_{j=1}^n \frac{dh}{dX_{t_j}} a dt \{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\} + \\ &+ \lambda \sum_{j=1}^n \frac{dh}{dX_{t_j}} b \{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\}^2, \end{aligned} \quad (3.48)$$

trascurando la seconda sommatoria, la relazione in media quadratica che generalizza la (3.47) è

$$I_S = I_I + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t b(s, X_s) \frac{dh}{dX_s} ds. \quad (3.49)$$

Dalla (3.48) si osserva che in media le due stime discrete dell'integrale sono

$$E(I_I) = 0, \quad (3.50)$$

$$E(I_S) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t E \left(b(s, X_s) \frac{dh}{dX_s} ds \right) ds. \quad (3.51)$$

Inoltre, dalla (3.47), si osserva che, qualora l'ampiezza di rumore b in (3.37) sia una funzione costante, tutti i metodi ($0 \leq \lambda \leq 1$) forniscono lo stesso risultato. Quest'ultima osservazione, pur nella sua semplicità matematica, fornisce in realtà un ulteriore apporto di valore al modello che si vuole delineare. Infatti, se si vuole che un processo fisico sia descritto da una equazione differenziale stocastica questa dovrà fornire un risultato in modo non ambiguo [137], ne segue che b deve essere una costante rispetto alla variabile aleatoria.

Il calcolo di Stranovich possiede però rispetto al calcolo di Ito la pregevole proprietà di riprodurre le regole del calcolo classico. Infatti ([58] p. 101), se si considera l'integrale stocastico

$$I = \int h(W_t) dW_t, \quad (3.52)$$

dove $h(W_t)$ è una funzione continua e differenziabile ed H la sua primitiva, sviluppando h in serie di Taylor si ha

$$h(W_{t_{j+1}}) = h(W_{t_j}) + h'(W_{t_j}) \{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\} + O(dt^{1/2}),$$

e risolvendo l'integrale in (3.52) attraverso la (3.44) si ottiene

$$I = \sum_{j=1}^n h(W_{t_j}) \{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n h'(W_{t_j}) \{W_{t_{j+1}} - W_{t_j}\}^2, \quad (3.53)$$

che corrisponde all'espressione

$$I_S = \int h(W_t) dW_t + \frac{1}{2} \int h'(W_t) dt, \quad (3.54)$$

dove gli integrali a destra sono intesi nel senso di Ito (3.43). Considerando che

$$dH = H(W_t + dW) - H(W_t) \quad (3.55)$$

$$= H(W_t) + H' dW + \frac{1}{2} H'' dW^2 - H(W_t), \quad (3.56)$$

dove $H' = dH/dW_t$ e la (3.56) è detta formula di Ito [40, 58], attraverso l'integrazione si ottiene

$$H(W_t) - H(W_{t_0}) = \int_{t_0}^t h(W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t h'(W_s) dt, \quad (3.57)$$

e quindi, combinando la (3.54) e la (3.57), si ha

$$I_S = \int h(W_t) dW_t = H(t) - H(t_0), \quad (3.58)$$

esattamente come ci si aspetta dal calcolo classico. Applicando invece il calcolo di Ito (3.43) alla (3.40), dalla (3.57) si ottiene ([58] p. 79)

$$I_I = H(W_t) - H(W_{t_0}) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t h'(W_s) dt. \quad (3.59)$$

3.1.4 Dall'equazione di Langevin all'equazione di Fokker-Planck

I due approcci, processi stocastici markoviani continui ed equazioni differenziali, risultano essere equivalenti.

Come riportato in ([40] p. 95-96), applicando la formula di Ito (3.56) ad una generica funzione $f(\mathbf{x}(t))$ la cui variabile aleatoria $\mathbf{x}(t)$ è soluzione di un'equazione differenziale stocastica del tipo scritto in (3.37)

$$dx_i = a_i(\mathbf{x}, t)dt + b_{ij}(\mathbf{x}, t)dW_j, \quad (3.60)$$

si ha

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}) \\ &= f(\mathbf{x}) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j - f(\mathbf{x}) \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} [a_i dt + b_{ij} dW_j] + \\ &+ \sum_{i,j} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} [a_i a_j dt^2 + (\mathbf{b}\mathbf{b}^T)_{ij} dW_i dW_j + 2a_i b_{jk} dW_k dt] \end{aligned} \quad (3.61)$$

dove $b_{ij} = (\mathbf{b})_{ij}$, trascurando i termini di ordine maggiore, mediando e ricordando che la media del rumore di Wiener è nulla, si ottiene che

$$\frac{d\langle f \rangle}{dt} = \left\langle \sum_i a_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\mathbf{b}\mathbf{b}^T)_{ij} \right\rangle,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \frac{\partial p(\mathbf{x}; t|\mathbf{y}; s)}{\partial t} = \\ \int d\mathbf{x} \left[\sum_i a_i(\mathbf{x}, t) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\mathbf{b}\mathbf{b}^T)_{ij} \right] p(\mathbf{x}; t|\mathbf{y}; s), \end{aligned} \quad (3.62)$$

soddisfatte le condizioni molto generali

$$apf \rightarrow 0, \quad b^2 p \frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow 0, \quad f \frac{\partial}{\partial x} (b^2 p) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

dalla (3.62), integrando per parti, si ha

$$\begin{aligned} \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \frac{\partial p(\mathbf{x}; t|\mathbf{y}; s)}{\partial t} = & - \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(\mathbf{x}, t)p) + \\ & + \int d\mathbf{x} f(\mathbf{x}) \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{2} (\mathbf{b}\mathbf{b}^T)_{ij} p \right) \end{aligned} \quad (3.63)$$

L'eq.(3.63), per l'arbitrarietà della funzione f , conduce all'equazione di Fokker-Planck

$$\frac{\partial p(\mathbf{x}; t | \mathbf{y}; s)}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i(\mathbf{x}, t) p) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} ((\mathbf{b}\mathbf{b}^T)_{ij} p). \quad (3.64)$$

I termini a_i e b_{ij} sono detti anche coefficienti di Kramers-Moyal [106].

3.1.5 Approssimazioni numeriche dei momenti statistici

Uno dei metodi più semplici di risoluzione discretizzata delle equazioni è l'approssimazione di Eulero, o di Eulero-Maruyama ([58] p. 305-321). Si consideri l'equazione differenziale stocastica

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad (3.65)$$

nell'intervallo temporale $t_0 \leq t \leq T$, con condizione iniziale $X_{t_0} = X_0$ e W_t un processo di Wiener. Si discretizzi l'intervallo temporale in incrementi costanti $\delta = (T - t_0)/N$ tali per cui ogni istante τ_n sia dato da $\tau_n = t_0 + n\delta$ con $n = 0, 1, \dots, N$ e quindi $\tau_0 = t_0$ e $\tau_N = T$. Il passo temporale δ risulta esprimibile anche attraverso la differenza $\tau_{n+1} - \tau_n$. L'incremento stocastico dW_t sarà discretizzato con $W_{\tau_{n+1}} - W_{\tau_n} = \Delta W_n$.

L'approssimazione di Eulero allora è data dallo schema iterato

$$X_{n+1} = X_n + a(\tau_n, X_n)\delta + b(\tau_n, X_n)\Delta W_n, \quad (3.66)$$

dove l'integrale stocastico è inteso nel senso di Ito (3.43). Le caratteristiche del processo di Wiener si manterranno anche nella sua forma discretizzata, in particolare la non derivabilità (3.22).

Senza approfondire il discorso riguardante la soluzione numerica delle equazioni differenziali stocastiche, analizzata sufficientemente in dettaglio per ogni ragionevole applicazione in [58], è però possibile studiare, in breve, l'approssimazione delle statistiche prodotte da una simulazione ed il suo discostamento da quelle effettive. Le soluzioni delle equazioni differenziali stocastiche, pur essendo state introdotte per simulare le traiettorie che si otterrebbero risolvendo l'analogo lagrangiano delle equazioni di Navier-Stokes (1.1), sono funzioni non differenziabili, diversamente da come sono attese essere le soluzioni delle equazioni dinamiche, quindi, è di interesse per lo studio che si sta svolgendo, l'analisi delle differenze delle sole statistiche, piuttosto che delle traiettorie stesse.

Nello studio dell'approssimazione dei momenti non occorre che le singole realizzazioni siano simili ma solamente che le densità di probabilità siano prossime, pertanto, non occorre neppure che si usi lo stesso incremento di Wiener.

E' possibile definire un errore medio tra la soluzione di Ito X_t e la sua simulazione $Y(T)$ all'istante T come

$$\mu = E(Y(T)) - E(X_T). \quad (3.67)$$

Le simulazioni possono essere raccolte in M insiemi di N realizzazioni ciascuno, ricordando che ogni realizzazione è indipendente, una stima dell'errore medio sarà definita dalla doppia sommatoria

$$\hat{\mu} = \frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N Y_{T,k,j} - E(X_T). \quad (3.68)$$

Scomposto l'errore medio in una componente sistematica ed una statistica $\hat{\mu} = \mu_{sis} + \mu_{stat}$, tale per cui $E(\hat{\mu}) = \mu_{sis}$, si osserva che

$$\begin{aligned} \mu_{sis} &= E(\hat{\mu}) \\ &= E\left(\frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N Y_{T,k,j}\right) - E(X_T) \\ &= E(Y(T)) - E(X_T) \\ &= \mu, \end{aligned} \quad (3.69)$$

da cui si conclude che

$$\mu_{stat} = \hat{\mu} - \mu. \quad (3.70)$$

Se NM è molto grande ed essendo tutte le simulazioni indipendenti allora, per il Teorema del Limite Centrale, si può affermare che l'errore statistico ϵ_{stat} è asintoticamente distribuito come una gaussiana con media nulla e varianza

$$\begin{aligned} Var(\mu_{stat}) &= Var(\hat{\mu} - \mu) \\ &= Var\left(\frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N Y_{T,k,j} - E(X_T) - (E(Y(T)) - E(X_T))\right) \\ &= Var\left(\frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N Y_{T,k,j} - E(Y(T))\right) \\ &= Var\left(\sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{Y_{T,k,j} - E(Y(T))}{MN}\right) \\ &= \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N Var\left(\frac{Y_{T,k,j} - E(Y(T))}{MN}\right) \\ &= \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N E\left(\frac{(Y_{T,k,j} - E(Y(T)))^2}{(MN)^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(MN)^2} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N E((Y_{T,k,j} - E(Y(T)))^2) \\
&= \frac{1}{MN} Var(Y(T)).
\end{aligned}$$

Si nota che l'intero numero di simulazioni NM influenza la precisione delle statistiche ottenute e non il singolo numero di simulazioni per insieme, N , o il numero di insiemi M .

La stessa analisi può essere svolta per la differenza assoluta tra la realizzazione simulata e quella esatta.

Definito ϵ l'errore assoluto tra il processo di Ito e la sua simulazione

$$\epsilon = E(|X_T - Y(T)|), \quad (3.71)$$

allora, dopo un intervallo di tempo T , considerati ancora M insiemi di N realizzazioni ciascuno, la media risulterà definita come

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N |X_{T,k,j} - Y_{T,k,j}|. \quad (3.72)$$

Scomposto, anche questa volta, l'errore assoluto in una componente sistematica ed una statistica $\hat{\epsilon} = \epsilon_{sis} + \epsilon_{stat}$, tale per cui $E(\hat{\epsilon}) = \epsilon_{sis}$, si osserva che

$$\begin{aligned}
\epsilon_{sis} &= E(\hat{\epsilon}) \\
&= E\left(\frac{1}{MN} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N |X_{T,k,j} - Y_{T,k,j}|\right) \\
&= E(|X_T - Y(T)|) \\
&= \epsilon,
\end{aligned} \quad (3.73)$$

da cui si conclude che

$$\epsilon_{stat} = \hat{\epsilon} - \epsilon. \quad (3.74)$$

Se NM è molto grande ed essendo tutte le simulazioni indipendenti allora, per il Teorema del Limite Centrale, si può affermare che anche in questo caso l'errore statistico ϵ_{stat} è asintoticamente distribuito come una gaussiana con media nulla e varianza

$$Var(\epsilon_{stat}) = \frac{1}{MN} Var(|X_T - Y(T)|). \quad (3.75)$$

Anche nel caso dell'errore assoluto dunque, la componente statistica produce un effetto legato al numero totale di realizzazioni.

Calcolando l'intervallo di confidenza per entrambi i parametri di scarto $\hat{\mu}$ e $\hat{\epsilon}$ attraverso il test della t-Student si ha ([58] p. 312 e p. 317)

$$\hat{\mu} \pm \Delta\hat{\mu} \quad \text{con} \quad \Delta\hat{\mu} \sim \frac{1}{\sqrt{M}},$$

$$\hat{\epsilon} \pm \Delta\hat{\epsilon} \quad \text{con} \quad \Delta\hat{\epsilon} \sim \frac{1}{\sqrt{M}},$$

dipendenti solamente da M .

3.2 Consistenza con le caratteristiche del flusso

I fenomeni naturali sono descritti principalmente attraverso equazioni differenziali le cui soluzioni sono funzioni necessariamente continue e derivabili. Così si intende essere anche il caso delle funzioni che descrivono la posizione e la velocità di particelle di fluido come si otterrebbero se l'analogo lagrangiano delle equazioni di Navier-Stokes fosse risolto.

Nella modellizzazione fatta per mezzo dei processi stocastici si ottengono traiettorie continue ma non derivabili, ne segue che le traiettorie ottenute da tali processi non saranno le soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes, ma solo realizzazioni casuali le cui statistiche possono riprodurre quelle di Navier-Stokes se correttamente modellate. Il fatto che le traiettorie ottenute da modelli stocastici non sono derivabili farebbe supporre che non esista alcun fenomeno fisico descritto da processi di questo tipo. Tuttavia, come approccio modellistico esso viene largamente utilizzato [136, 137, 40, 58, 91]. Una simile approssimazione viene applicata, ad esempio, nei modelli di collisione per un gas composto da sferette rigide i cui urti supposti elastici forzano la velocità delle sferette a modificarsi bruscamente nell'istante dell'impatto. In realtà, durante gli urti agirà un potenziale che in modo continuo (e derivabile) modificherà il valore della velocità ma le scale temporali di azione di detto potenziale saranno estremamente piccole che non ha alcun senso domandarsi la continuità [40].

Tuttavia, nel caso della dispersione turbolenta, l'idea di una approssimazione del moto delle particelle attraverso traiettorie stocastiche non derivabili potrebbe essere di più di una approssimazione modellistica. Nel 1926, L.F. Richardson [105] si domandava *Does the wind possess a velocity?*, concludendo il paragrafo così intitolato con

Although this theory of Taylor's is available, yet I think it will be a useful adventure to try now to make a theory of diffusion without assuming that $\Delta x/\Delta t$ has a limit.

Storicamente, l'ipotesi di markovianità nello studio della dispersione turbolenta è stata introdotta per la prima volta da A. M. Obukhov nel 1959

[90], il quale propose un modello retto da una equazione di Fokker-Planck nello spazio delle fasi del tipo

$$\frac{\partial p_L}{\partial t} = -u_i \frac{\partial p_L}{\partial x_i} + D \frac{\partial^2 p_L}{\partial u_i \partial u_i}, \quad (3.76)$$

dove p_L è la PDF lagrangiana congiunta definita nel capitolo 2. Tuttavia, come mostrato da E. A. Novikov nel 1989 [87], l'indipendenza del termine di drift dalla velocità genera risultati inconsistenti con le equazioni di Navier-Stokes. La formulazione corretta è stata derivata da D.J. Thomson nel 1987 [132]. Negli anni, i modelli stocastici sono stati sviluppati e perfezionati fino a risultare un ottimo approccio per la simulazione della turbolenza lagrangiana, si vedano ad esempio i lavori di rassegna [107, 142].

3.2.1 Processi stocastici e velocità lagrangiana turbolenta

Nel limite dell'ipotesi di markovianità, come visto, è possibile introdurre l'equazione di Chapman-Kolmogorov (3.25), alla quale tutti i processi markoviani obbediscono. In letteratura esistono diversi tipi di modelli stocastici e di diversi tipi sono quelli proposti per la dispersione turbolenta. Tuttavia, come mostrato da B.L. Sawford e M.S. Borgas nel 1994 [115] solo quelli continui soddisfano la teoria di Kolmogorov K41. Ne segue che, la modellizzazione stocastica dei processi di dispersione turbolenta deve essere formulata in termini dell'equazione di Fokker-Planck (3.32). La coerenza dei processi stocastici continui con la K41 garantisce la coerenza anche del secondo approccio evidenziato, quello cioè relativo alle equazioni differenziali stocastiche. Infatti, come mostrato in precedenza, i due approcci risultano essere equivalenti, così, l'assunzione che le equazioni cinematiche del moto delle particelle possano essere sostituite da un loro analogo stocastico è anch'essa coerente con la K41.

I processi stocastici continui e discontinui conducono a risultati generali confrontabili e discriminanti tra loro di fronte al paradigma della K41 [115]. In particolare, analizzando la funzione di struttura lagrangiana del secondo ordine nell'intervallo inerziale. Infatti, specificando le variabili \mathbf{z} e \mathbf{y} dell'equazione differenziale di Chapman-Kolmogorov (3.31) rispettivamente con \mathbf{V} e \mathbf{u} , le velocità della particella agli istanti t e t_0 , allora si dimostra che nel limite $t - t_0 = \tau \rightarrow 0$ con un modello continuo (3.32), definito $\Delta_\tau V_i = V_i(t_0 + \tau; \mathbf{x}_0) - V_i(t_0; \mathbf{x}_0) = V_i(t_0 + \tau; \mathbf{x}_0) - u_i(\mathbf{x}_0, t_0)$, si ottiene

$$\langle \Delta_\tau V_i \Delta_\tau V_j | \mathbf{u} \rangle = B_{ij} \tau, \quad (3.77)$$

in accordo con K41, tanto da consentire di specificare, secondo la (2.8), il coefficiente B_{ij}

$$B_{ij} = C_0 \varepsilon \delta_{ij}, \quad (3.78)$$

dove C_0 è la costante universale lagrangiana ed ε il tasso medio di energia dissipata. Nel caso di modelli non continui (3.33) si ottiene

$$\langle \Delta_\tau V_i \Delta_\tau V_j | \mathbf{u} \rangle = (\sigma^2 \delta_{ij} + u_i u_j) \tau / T_L, \quad (3.79)$$

dove σ^2 è la varianza della velocità, i quali, pur mantenendo la corretta dipendenza lineare da τ , non riproducono l'indipendenza dalla condizione iniziale, caratteristica, questa, dell'universalità dell'intervallo inerziale.

3.2.2 I modelli Well-Mixed

Come visto, il coefficiente dell'ampiezza del rumore è determinato secondo la formula (3.78), mentre il coefficiente di drift resta ancora indeterminato. La determinazione del termine di drift ricopre un ruolo fondamentale nei modelli stocastici. Questa operazione non risulta banale perchè è associata alle informazioni relative alle caratteristiche del flusso. La determinazione formale del termine di drift è dovuta a D.J. Thomson [132]. Essa risulta essere l'esatta formulazione di un processo stocastico per descrivere il moto di particelle in un campo di velocità casuale di un mezzo continuo. Ricordando la formula integrale di Thomson-Novikov (2.17), che lega la PDF euleriana con la densità di probabilità di transizione lagrangiana, si osserva che l'equazione di Fokker-Planck soddisfatta dalla densità lagrangiana è soddisfatta anche da quella euleriana. Infatti, dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} d\mathbf{x} &= \mathbf{u} dt \\ d\mathbf{u} &= \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) dt + \sqrt{C_0 \varepsilon} d\mathbf{W} \end{cases} \quad (3.80)$$

dove (\mathbf{x}, \mathbf{u}) costituisce lo stato della particella all'istante t dato che questa si trovasse in (\mathbf{y}, \mathbf{v}) all'istante s , allora la transizione tra questi due stati è descritta dalla densità di probabilità condizionata $p_L(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t | \mathbf{y}, \mathbf{v}; s)$.

Come mostrato in precedenza (paragrafo 3.1.4), il sistema di equazioni stocastiche (3.80) genera variabili aleatorie (\mathbf{x}, \mathbf{u}) la cui densità di probabilità evolve secondo l'equazione di Fokker-Planck (3.32) nella forma

$$\frac{\partial p_L}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i p_L) + \frac{\partial}{\partial u_i} (a_i p_L) + \frac{C_0 \varepsilon}{2} \frac{\partial^2 p_L}{\partial u_i \partial u_i}, \quad (3.81)$$

e la (2.17) consente di ottenere dalla (3.81) l'equazione

$$\frac{\partial p_E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i p_E) + \frac{\partial}{\partial u_i} (a_i p_E) + \frac{C_0 \varepsilon}{2} \frac{\partial^2 p_E}{\partial u_i \partial u_i}. \quad (3.82)$$

Note la caratteristiche della velocità del flusso, quindi la p_E , la (3.82) diventa un'equazione per a_i

$$a_i p_E = \frac{C_0 \varepsilon}{2} \frac{\partial^2 p_L}{\partial u_i \partial u_i} + \Phi_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad (3.83)$$

dove

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial u_i} = -\frac{\partial p_E}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i p_E), \quad (3.84)$$

con le generiche condizioni $|\Phi| \rightarrow 0$ quando $|\mathbf{u}| \rightarrow \infty$. L'equazione (3.83) è detta *Well-Mixed Condition* e rende il processo coerente con le statistiche euleriane: in particolare, un insieme di particelle uniformemente distribuito si conserva tale nel tempo.

Nei casi non unidimensionali, a_i non è univocamente determinata dalla (3.83) poichè ogni vettore Φ^* tale per cui la divergenza rispetto \mathbf{u} è nulla ($\partial \Phi_i^*/\partial u_i = 0$) può essere sommato al vettore Φ ottenendo un vettore $\Phi' = \Phi + \Phi^*$ che è ancora una soluzione consistente con la (3.83). Questa indeterminazione non esiste nel caso unidimensionale o nel caso stazionario, omogeneo ed isotropo [21]. In entrambi i casi si ha $\partial \Phi_i/\partial u_i = 0$, inteso sia come caso unidimensionale o divergenza, da cui segue che poichè la soluzione di (3.83) tende a zero quando il modulo della velocità tende ad infinito, allora Φ_i^* non può che essere nullo per tutti i valori della velocità.

3.2.3 Significato fisico del coefficiente di drift

Nel 1987, D.J. Thomson [132] derivò una relazione che evidenzia in maniera esplicita il significato fisico del coefficiente di drift nell'equazione (3.80).

Si consideri il trasporto da parte del campo di velocità della quantità ρS dove S è un generico scalare, l'equazione che lo descrive è

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho S) + \nabla \cdot (\mathbf{u}\rho S) = S \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\rho) \right) + \rho \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}S) \right), \quad (3.85)$$

dall'equazione di continuità (1.3) si ha che il primo termine tra parentesi a destra dell'uguale è nullo e che nel caso in cui $S = u_i$ il secondo termine tra parentesi corrisponde all'equazione dell'accelerazione delle particelle, così dalla (3.85) si ottiene

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} u_j \right) (u_i \rho) = \frac{\partial}{\partial u_i} (\rho u_i) \frac{D u_i}{D t}. \quad (3.86)$$

Dalla teoria delle trasformate di Fourier [118], definita la trasformata integrale

$$\hat{g}_a(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t) = \int g_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t) \exp(i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}) d^3 \mathbf{u}, \quad (3.87)$$

nella coppia di variabili $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{k}$ si ha che

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} u_j \leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial k_j}, \quad (3.88)$$

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \leftrightarrow i k_i, \quad (3.89)$$

e quindi dall'equazione (3.86)

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial k_j} \right\} \exp(i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}) = \left\{ ik_i \frac{Du_i}{Dt} \right\} \exp(i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}). \quad (3.90)$$

Moltiplicando ambo i membri della (3.90) per $g_a(\mathbf{u}, \mathbf{x}; t)$ ed integrando in $d^3\mathbf{u}d^3\mathbf{x}$ si arriva alla relazione conclusiva. Si consideri prima il termine a sinistra dell'uguale

$$\int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{u} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial k_j} \right\} \exp(i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}) g_a(\mathbf{x}, \mathbf{u}; t) = \quad (3.91)$$

$$= \int d^3\mathbf{x} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} - i \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial k_j} \right\} \hat{g}_a(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t) \quad (3.92)$$

$$= \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{u} \left\{ \frac{\partial g_a}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i g_a) \right\} \exp(i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}) \quad (3.93)$$

$$= \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{u} \left\{ -\frac{\partial}{\partial u_i} (a_i g_a) + \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} (B_{ij} g_a) \right\} \exp(i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}) \quad (3.94)$$

$$= \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{u} \left\{ a_i - \frac{1}{g_a} \frac{\partial^2}{\partial u_j} (B_{ij} g_a) \right\} ik_i g_a \exp(i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}), \quad (3.95)$$

dove la (3.92) è stata ottenuta dalla (3.91) riscrivendo in forma integrale estesa la trasformata di Fourier (3.87). Nel caso del termine a destra in (3.90), si consideri la derivata materiale per la velocità del flusso soluzione delle equazioni di Navier-Stokes (1.1), cosicché si possa parlare dell'equazione dinamica del sistema. Ogni realizzazione del flusso seleziona una sola della possibili velocità associate alla PDF $g_a(\mathbf{u}, \mathbf{x}; t)$ e quindi

$$\int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{u} \int d^3\mathbf{u}_E ik_i \frac{Du_{Ei}}{Dt} \exp(i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}) \delta(\mathbf{u}_E(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}) g_a = \quad (3.96)$$

$$= \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{u} ik_i \left\langle \frac{Du_{Ei}}{Dt} \middle| \mathbf{u}, \mathbf{x}, t \right\rangle \exp(i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}) g_a. \quad (3.97)$$

Combinando le formule (3.95) e (3.97) si ottiene

$$a_i = \left\langle \frac{Du_{Ei}}{Dt} \middle| \mathbf{u}, \mathbf{x}, t \right\rangle + \frac{1}{g_a} \frac{\partial}{\partial u_j} (B_{ij} g_a). \quad (3.98)$$

Noto dal capitolo 2 che $g_a(\mathbf{u}, \mathbf{x}; t) = \langle \rho(\mathbf{x}, t) \rangle_{p_E(\mathbf{u}; t | \mathbf{x})}$ (2.11) ed il coefficiente B_{ij} definito dalla (3.78), si ottiene

$$a_i = \left\langle \frac{Du_{Ei}}{Dt} \middle| \mathbf{u}, \mathbf{x}, t \right\rangle + \frac{C_0 \varepsilon}{2p_E} \frac{\partial p_E}{\partial u_i}. \quad (3.99)$$

L'equazione (3.99), che si può ottenere anche dalla combinazione della (3.82) con l'equazione del trasporto derivata da S. Pope nel 1985 [96] nel caso di fluidi incompressibili, evidenzia il fatto che il termine di drift è dato dalla

somma della media d'insieme dell'accelerazione sentita dalla particella condizionata alla velocità che essa possiede in quel determinato istante con un termine legato all'ampiezza del rumore. Ne segue, che la (3.99) risulta essere una forma del teorema fluttuazione-dissipazione [40], evidenziando il fatto che per intervalli temporali molto lunghi la media d'insieme della equazione dinamica si annullerà ed il processo diventerà diffusivo.

3.2.4 Modelli Well-Mixed per la dispersione assoluta

Come visto, i modelli Well-Mixed necessitano della prescrizione di una PDF delle velocità del flusso p_E ed inoltre non risultano univocamente determinati. D.J. Thomson, nel 1987 [132], propose come esempio un modello con PDF euleriana gaussiana e derivò una soluzione della (3.84) nel caso di turbolenza isotropa, non omogenea, non stazionaria e con velocità media \mathbf{U} non nulla. Adottando la scomposizione del capitolo 2 $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$ (2.54), la PDF della velocità risulta essere:

$$p_E(\mathbf{u}; t|\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} \det(\sigma)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} u'_i (\sigma^{-1})_{ij} u'_j \right\}, \quad (3.100)$$

dove σ è la matrice di correlazione di elementi $\sigma_{ij} = \langle u'_i u'_j \rangle$. La soluzione per il coefficiente di drift \mathbf{a} , come conseguenza della PDF scelta, risulta

$$a_i = -\frac{C_0 \varepsilon}{2} (\sigma^{-1})_{ik} u'_k + \frac{\Phi_i}{p_E}, \quad (3.101)$$

e delle possibili Φ_i è stata proposta la seguente

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_i}{p_E} = & \frac{1}{2} \frac{\partial V_{il}}{\partial x_l} + \frac{\partial U_i}{\partial t} + U_l \frac{\partial U_i}{\partial x_l} + \\ & + \left[\frac{1}{2} (V^{-1})_{lj} \left(\frac{\partial V_{il}}{\partial t} + U_m \frac{V_{il}}{x_m} \right) + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] u'_j + \\ & + \frac{1}{2} (V^{-1})_{lj} \frac{\partial V_{il}}{\partial x_k} u'_j u'_k. \end{aligned} \quad (3.102)$$

Come mostrato in [21], nel caso di turbolenza isotropa, omogenea e stazionaria il coefficiente di drift è univocamente determinato anche nel caso di un processo tridimensionale e conservando la p_E come in (3.100), il processo si riduce a tre distinti processi di Ornstein-Uhlenbeck [40]

$$a_i = -\frac{C_0 \varepsilon}{2\sigma^2} u_i, \quad (3.103)$$

con $\sigma^2 = \langle u'_i u'_i \rangle$. Le statistiche della dispersione stimate attraverso il modello definito in (3.103) riproducono i risultati per la dispersione assoluta predetti da G.I. Taylor nel 1921 [128], qui riportati nel capitolo 2.

Come detto, quella di D.J. Thomson riportata in (3.102) è solo una delle possibili soluzioni. Altre soluzioni per a_i , che possiedono come questa una forma quadratica in \mathbf{u} sono state analizzate in diversi articoli studiandone anche le caratteristiche dinamiche essendo queste direttamente legate al problema della indeterminazione [21, 99, 113, 100, 102].

Nel 1999, P. Franzese *et al.* [37] propongono un modello unidimensionale fondato sull'ipotesi che il coefficiente di drift sia una funzione quadratica della velocità u anche nel caso non gaussiano, in particolare con skewness non nulla, definito come:

$$a(u, x, t) = \alpha(x, t)u^2 + \beta(x, t)u + \gamma(x, t). \quad (3.104)$$

I coefficienti α , β e γ sono determinati sostituendo la (3.104) nella (3.82) ed imponendo la consistenza con i primi 4 momenti statistici euleriani assunti noti sperimentalmente. Tuttavia, non esiste alcuna p_E che soddisfi queste condizioni [1]. Si consideri il semplice caso omogeneo e stazionario allora dalla (3.82) si ha

$$\alpha u^2 + \beta u + \gamma = \frac{C_0 \varepsilon}{2} \frac{\partial}{\partial u} \ln p_E, \quad (3.105)$$

che, integrata in u , ha come soluzione

$$p_E(u) \sim \exp \left\{ \frac{2}{C_0 \varepsilon} \left(\frac{\alpha}{3} u^3 + \frac{\beta}{2} u^2 + \gamma u \right) \right\}. \quad (3.106)$$

Come riportato in [1], la funzione in (3.106) non è in realtà una densità di probabilità poichè non converge e conseguentemente non è normalizzata quando $u \rightarrow +\infty$ o $u \rightarrow -\infty$ secondo il segno di α . Nel caso in cui la skewness sia nulla il modello in [37] si riduce al caso gaussiano (3.103).

Uno studio delle proprietà dei modelli Well-Mixed al cambiare della PDF euleriana p_E si trovano, ad esempio, in [80, 125, 77, 78].

3.2.5 Modelli Well-Mixed per la dispersione relativa

Nel 1990, D.J. Thomson [133] propose un modello Well-Mixed per la dispersione relativa formalmente identico a quello per la dispersione assoluta [132]. Tuttavia, nel caso della dispersione relativa occorre considerare gli effetti dovuti alla correlazione spaziale del campo di velocità nei due punti occupati dalle particelle. Inoltre, anche nel caso di turbolenza omogenea la formalizzazione del processo non può essere indipendente dalla separazione tra le particelle e quindi non è possibile utilizzare la soluzione unica trovata in [21] nel caso della dispersione assoluta.

La formulazione del modello conserva le equazioni (3.101-3.102) nelle quali però le quantità \mathbf{u} e \mathbf{x} sono sostituite dalla differenza di velocità tra le due particelle (che si può indicare ancora con \mathbf{u}) e la loro separazione \mathbf{r} : $\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{u}^{(2)}$, $\mathbf{r} = \mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}$. Il coefficiente di rumore, in questo nuovo caso, si modifica in $\sqrt{2C_0\varepsilon}$.

Le statistiche considerate diventano, in modo naturale, le statistiche per le differenze, le quantità tipiche della teoria di Kolmogorov K41. I momenti secondi euleriano e lagrangiano corrispondono alle rispettive funzioni di struttura del secondo ordine. Inoltre, in questo caso, la PDF euleriana non può essere gaussiana poiché, per l'unico risultato esatto noto delle equazioni di Navier-Stokes (1.1), la cosiddetta legge dei 4/5 [84, 38], si ha

$$\langle u_{\parallel}^3 \rangle = -\frac{4}{5}\varepsilon r, \quad (3.107)$$

con $u_{\parallel} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}/r$.

La dispersione relativa è un processo che risente, contemporaneamente, delle caratteristiche lagrangiane (la dispersione) ed euleriane (la correlazione spaziale del campo di velocità). L'influenza delle scale di correlazione lagrangiana ed euleriana nei modelli Well-Mixed di dispersione relativa può essere stimata come nell'articolo [79]. Siano

$$\langle u_i u_j \rangle = C_k (\varepsilon r)^{2/3} \delta_{ij} = 2\sigma^2 \left(\frac{r}{\lambda} \right)^{2/3} \delta_{ij}, \quad (3.108)$$

$$\langle u_i u_j \rangle = C_0 \varepsilon t \delta_{ij} = 2\sigma^2 \left(\frac{t}{\tau} \right) \delta_{ij}, \quad (3.109)$$

le funzioni di struttura euleriana (3.108) e lagrangiana (3.109), allora esse definiscono in questo modo una lunghezza di scala euleriana λ ed un tempo di scala lagrangiano τ . Le quantità $\sqrt{2}\sigma$, λ e τ definiscono quindi anche scale per la velocità, la separazione e l'intervallo temporale attraverso le quali adimensionalizzare il problema ottenendo così il seguente sistema di equazioni per le variabili adimensionali

$$\begin{cases} d\mathbf{x} = \beta \mathbf{u} dt \\ d\mathbf{u} = \mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) dt + \sqrt{2} d\mathbf{W} \end{cases}, \quad (3.110)$$

dove

$$\beta = \frac{\sqrt{2}\sigma\tau}{\lambda} = \frac{C_K^{3/2}}{C_0}, \quad (3.111)$$

e l'equazione (3.82) diventa

$$\frac{\partial p_E}{\partial t} = -\beta \frac{\partial}{\partial r_i} (u_i p_E) - \frac{\partial}{\partial u_i} (a_i p_E) + \frac{\partial^2 p_E}{\partial u_i \partial u_i}. \quad (3.112)$$

Come è evidente dalle formule (3.110) e (3.112) le statistiche del modello dipenderanno solamente dal parametro β , il quale rappresenta il rapporto tra una stima della scala spaziale lagrangiana e quella euleriana.

Come evidenziato nel capitolo 2, il parametro β è molto importante nello studio della dispersione. Adottando le stesse scale di adimensionalizzazione per la legge di Richardson (2.73) si ottiene

$$\langle r^2 \rangle = g^* \beta^2 t^3, \quad (3.113)$$

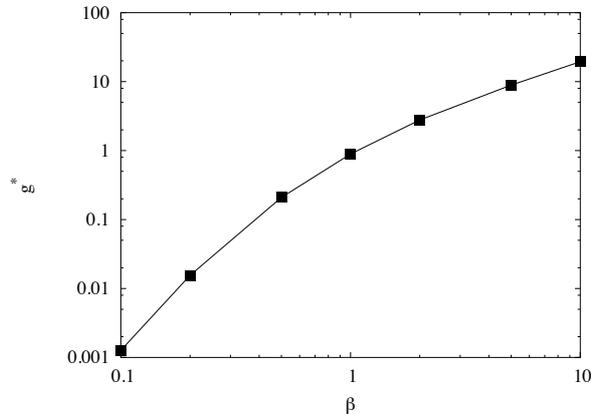


Figura 3.1: La costante di Richardson normalizzata g^* , stimata attraverso il modello di D.J. Thomson [133], in funzione del parametro β definito in (3.111).

dove $g^* = g/C_0$ e g è la costante di Richardson (2.73). Si osserva che la dispersione relativa è completamente caratterizzata da g^* e β . Inoltre, come evidenziato in [79], g^* è il rapporto tra la differenza di velocità tra due particelle dopo un determinato tempo $\langle (u_i)^2 \rangle = g\epsilon t$ ([84] p. 545) e la funzione di struttura del secondo ordine (3.109). Questo rapporto è una costante. Il processo di dispersione relativa può essere visto come la dispersione di una particella stimata in un sistema di riferimento non inerziale posto sulla seconda particella. Tuttavia, per tempi molto piccoli, $t \ll \tau$, questo moto non è molto differente da quello relativo ad un sistema di riferimento inerziale con velocità pari a quella iniziale della particella ([84] p. 546). Quindi, la costante C_0 può essere adottata come scala per g e g^* essere considerata come costante di Richardson normalizzata.

Poiché, nello schema K41 qui adottato, C_K e C_0 sono costanti universali il valore di β risulta univocamente determinato. Tuttavia, la forte variabilità sperimentale del valore di queste costanti [120, 2], come evidenziato nel capitolo 2, rende β fortemente variabile. La dipendenza dei modelli Well-Mixed dalla variabilità di β è stata analizzata in [79] nel caso del modello di dispersione relativa proposto da D.J. Thomson nel 1990 [133]. In Fig. 3.1 è riportato il grafico che mostra la dipendenza di g^* da β nel caso del modello in [133]; è evidente che g^* aumenta all'aumentare di β e questo indica che al diminuire della correlazione spaziale aumenta la dispersione relativa. Dall'analisi dei dati della DNS [12], riportata nel capitolo 5, si è ottenuto $g^* = 0.074$ e $\beta = 0.6$, a parità di β , dunque, g^* determinato dal modello è maggiore di quello osservato della simulazione numerica.

Come calcolato da D.J. Thomson ([132] p. 541), il coefficiente di diffu-

sione K_{ij} nel caso dei modelli Well-Mixed risulta essere

$$K_{ij} = -\frac{\int (u_i - U_i) G_i d^3 \mathbf{u}}{\int g_a d^3 \mathbf{u}}, \quad (3.114)$$

dove G_k è soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial}{\partial u_i} \left\{ B_{ij} g_a \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{G_k}{g_a} \right) \right\} - \frac{\partial}{\partial u_i} \left(\frac{\Phi_{0_i} G_k}{g_a} \right) = (u_k - U_k) g_a,$$

con G_k/g_a limitato e Φ_{0_i} è il primo termine dello sviluppo di Taylor di Φ . Inoltre deve valere l'equazione

$$\int \left\{ B_{ij} g_a \frac{\partial}{\partial u_j} \left(\frac{G_k}{g_a} \right) - \frac{\Phi_{0_i} G_k}{g_a} \right\} dS_i = 0,$$

dove $d^3 \mathbf{S}$ è un elemento di superficie attraversata dal flusso quando $|\mathbf{u}| = \infty$. Dalla (3.114) segue che il coefficiente di diffusione nel caso dei modelli Well-Mixed è una quantità statistica, funzione della PDF delle velocità del flusso e non corrisponde ad una relazione del tipo flusso-gradiente, queste caratteristiche soddisfano le osservazioni di G.K. Batchelor [10] e S. Corrsin [31] sulla teoria della dispersione relativa formulata da L.F. Richardson [105] come discusso nel capitolo 2.

Uno studio della dipendenza del coefficiente di diffusione K_{ij} (3.114) dalla scelta della PDF euleriana, seppur definito per la dispersione assoluta, si trova nell'articolo [77].

Tuttavia, la formulazione dei modelli di dispersione relativa secondo lo schema definito da D.J. Thomson nel 1990 [133] presenta una forte inconsistenza fisica. Essi, infatti, non si riducono a corretti modelli di dispersione assoluta selezionando, ad esempio, una particella per ciascuna coppia. Questa inconsistenza è stata analizzata in [21] come criterio di selezione tra le possibili soluzioni, ma non si può derivare nessun risultato conclusivo. Una trattazione definitiva di questo problema è ancora mancante. Nel prossimo capitolo, sarà analizzato un approccio che, pur non risolvendo la questione, è tale per cui il problema non può essere posto. Infatti, ciò che viene modellato è, nel caso di turbolenza isotropa, il modulo della separazione tra le coppie e questo non consente di determinare il moto delle singole particelle.

3.2.6 L'indeterminazione nei modelli Well-Mixed

Come evidenziato più volte, nel caso di processi non unidimensionali, i modelli Well-Mixed non sono univocamente determinati. La scelta di una soluzione è spesso arbitraria, lo stesso D.J. Thomson nell'articolo del 1987 [132] introduce una di queste soluzioni con la seguente frase:

In more than one dimension there are many possible choices for Φ of which the simplest is

Questa arbitrarietà è dovuta al fatto che l'utilizzo della sola formula di Thomson-Novikov (2.17) non definisce nessuna condizione dinamica, ma solo una di tipo statistico. Da questo fatto segue che la PDF delle velocità del flusso non contiene tutta l'informazione necessaria per determinare in modo univoco un modello.

Diversi tentativi sono stati fatti negli anni per studiare e determinare le caratteristiche dinamiche necessarie per la determinazione univoca dei modelli Well-Mixed. Nel caso della dispersione relativa, la derivazione delle corrette statistiche di dispersione assoluta può essere adottata come criterio per selezionare un'unica soluzione [21]. La maggior parte dei tentativi è stata rivolta allo studio della rotazione media delle traiettorie delle particelle nel caso della dispersione assoluta [141, 99, 100, 113, 102]. Questa proprietà non consente però di determinare in modo univoco il modello. Tuttavia, lo studio della rotazione delle traiettorie può essere messa in relazione con altri risultati noti, come ad esempio i modelli di chiusura al secondo ordine delle equazioni di Navier-Stokes mediate (dette equazioni di Reynolds). Nessuno dei precedenti lavori ha però proposto risultati definitivi.

Per quanto riguarda lo studio della dispersione relativa, si è ritenuto interessante l'approccio introdotto da O.A. Kurbanmuradov e K.K. Sabel'feld nel 1995 [67] e poi completato da O.A. Kurbanmuradov nel 1997 [65]. In questo approccio i modelli Well-Mixed vengono trascritti nel sistema di coordinate sferiche definito dalla congiungente le due particelle. In particolare, O.A. Kurbanmuradov [65] propose, per determinare in modo univoco il modello, l'assunzione secondo cui la proiezione longitudinale della differenza di velocità tra le particelle è indipendente dalla componente trasversale, riducendo un problema fisicamente tridimensionale ad uno matematicamente unidimensionale. Questo approccio, con questa assunzione, è stato sviluppato in seguito da O.A. Kurbanmuradov e collaboratori [109, 68, 110, 66] e da altri autori [22, 101, 36, 23].

Modelli di questo tipo sono analizzati nel capitolo seguente, nel quale si propone, inoltre, un nuovo modo di determinare in maniera univoca la soluzione di un processo stocastico non unidimensionale, senza utilizzare l'assunzione di O.A. Kurbanmuradov [65] poiché essa risulta non corretta per i flussi turbolenti (capitolo 5).

Capitolo 4

Modelli stocastici in coordinate sferiche per la dispersione relativa in flussi turbolenti isotropi

Come già visto nel capitolo 2, la quantità statistica maggiormente rilevante nella descrizione dei processi di dispersione relativa è il vettore di separazione tra due particelle di fluido. Nel caso di turbolenza isotropa, ipotizzata dalla teoria di Kolmogorov K41 per separazioni spaziali e temporali appartenenti all'intervallo inerziale, le proprietà della dispersione sono determinate utilizzando solo il modulo di detto vettore, poiché, non esistendo direzioni preferenziali, il suo orientamento nello spazio risulta statisticamente uniforme. Si è visto inoltre, che una legge caratteristica che descrive questi processi è detta di Richardson (2.73), il quale la propose nel 1926 [105]. Questa legge rappresenta un'altra caratteristica legge di potenza della turbolenza, determinabile anche attraverso l'analisi dimensionale [89, 6, 10].

Poiché nel caso di un processo isotropo, come detto, ciò che caratterizza la dispersione sono le statistiche del modulo del vettore separazione, il sistema di coordinate sferiche definito dal modulo della distanza tra le due particelle e due angoli può essere considerato come il sistema naturale nel quale descrivere tali processi. Così nasce l'idea originale di O.A. Kurbanmuradov [65].

Il sistema pensato è quello definito lagrangianamente dal vettore separazione lungo il quale vengono proiettate le quantità analizzate. Tale sistema è evidentemente non inerziale, poiché segue il moto delle particelle, tuttavia esso consente di ridurre lo studio delle caratteristiche del problema all'analisi del solo modulo della separazione piuttosto che le 3 componenti del caso in cui il sistema di riferimento sia cartesiano. Esso consente, inoltre, di introdurre, in maniera naturale, le caratteristiche proprie del campo di

velocità euleriano come prescritte dalla teoria di Kolmogorov K41.

Lo stesso sistema di riferimento era stato adottato da E.A. Novikov nel 1992 [88] per studiare le proprietà statistiche della densità di probabilità della velocità del flusso, in seguito, tali proprietà sono state utilizzate da E.A. Novikov nel modello stocastico di dispersione relativa [95].

In questo capitolo, dopo uno studio generale delle caratteristiche di un tale sistema di riferimento, verranno analizzati i modelli già esistenti in letteratura e ne sarà proposto uno nuovo. Saranno discusse alcune caratteristiche dinamiche e verrà analizzato il limite per scale spaziali di correlazione molto piccole.

4.1 Caratteristiche generali

Si inizierà lo studio della descrizione della dispersione relativa analizzando alcune proprietà che risultano ben note nel sistema cartesiano. Infatti, caratteristiche statistiche definite in modo semplice nel sistema cartesiano costituiscono, invece, un nuovo schema concettuale nel nuovo sistema di riferimento.

Il primo aspetto da considerare è sicuramente la consistenza delle statistiche: ogni coppia, in un determinato istante, possiede una specifica separazione con uno specifico orientamento, questa separazione definisce quindi, per ogni coppia, uno specifico sistema di riferimento. Ne segue che, le medie d'insieme, ad istanti fissati, delle componenti longitudinale e trasversale, rispetto alla congiungente le particelle di quantità relative (ad esempio la differenza di velocità) risultano date dalla combinazione di misure riferite a separazioni diverse. Questo è un aspetto dell'insieme statistico su cui si calcolano le medie, che non si considera quando il sistema di riferimento adottato è quello cartesiano poiché, in questo caso, esso risulta essere lo stesso per tutte le coppie di particelle ed anche per le quantità relative. Tuttavia, nel caso delle coordinate sferiche, si osserva che, poiché il sistema è isotropo, i sistemi di riferimento definiti dalle coppie costituiscono un insieme statistico coerente. Infatti, ogni modulo della separazione contiene in sé tutta l'informazione necessaria a caratterizzare statisticamente in modo univoco l'intero vettore, contenendo quindi, in senso statistico, le tre componenti cartesiane riferite ad un unico sistema di coordinate. Il fatto che, per un sistema isotropo, l'insieme dei sistemi di riferimento definiti da ciascuna coppia di particelle costituisce un insieme statistico coerente è importante per lo studio delle caratteristiche delle quantità relative che, altrimenti, andrebbero stimate per ciascuna coppia nel proprio sistema di riferimento. Conseguentemente, sono coerenti anche le statistiche d'insieme delle componenti longitudinali e trasverse rispetto alla congiungente le particelle. Concludendo, quindi, ogni singola coppia rappresenta una realizzazione di un processo stocastico.

Un altro significativo esempio delle differenze che comporta l'adozione di un sistema di riferimento non cartesiano è dato dalla proprietà di incomprimibilità, come visto nel capitolo 2. In senso statistico, l'incomprimibilità è espressa da una densità di probabilità costante di trovare elementi di fluido nel volume considerato. Tuttavia, affinché la probabilità (definita come l'integrale della densità di probabilità [40]) rimanga la stessa e quindi la proprietà fisica mantenuta, la densità di probabilità nel nuovo sistema di riferimento risulta legata alla precedente attraverso lo jacobiano della trasformazione. Ne segue che, nel caso in cui lo jacobiano sia una funzione, come nella trasformazione alle coordinate sferiche, la descrizione di un processo che in coordinate cartesiane viene svolta attraverso una densità di probabilità costante di trovare una particella di fluido in un certo punto ora, lo stesso processo, è descritto utilizzando una densità di probabilità variabile.

4.1.1 Trasformazione di variabili

Si darà inizio allo studio analizzando una generica trasformazione di variabili per l'equazione di Fokker-Planck (3.32) e, conseguentemente, per l'equazione differenziale stocastica (3.37) ad essa associata. Come visto nel capitolo 3, esse sono alla base della formulazione dei modelli stocastici per la dispersione turbolenta qui presentati.

Si consideri la generica trasformazione di variabili $\{x_i\} \rightarrow \{x'_i(\{x_i\}, t)\}$ il cui jacobiano risulta essere $J = |Det\{\partial x_i/\partial x'_j\}|$: è possibile riscrivere una equazione differenziale alle derivate parziali nelle variabili $\{x_i\}$ in una le cui variabili siano $\{x'_i\}$ trasformando opportunamente gli operatori differenziali. La nuova equazione descriverà il processo in modo identico alla precedente; se l'equazione alle derivate parziali considerata è un'equazione di evoluzione per una certa PDF (ad esempio una Master Equation (3.31), allora occorrerà tenere in considerazione che la nuova equazione deve essere ancora un'equazione di evoluzione e che quindi la sua soluzione sarà ancora una densità di probabilità e quindi una funzione normalizzata. Ciò si realizza per mezzo dello jacobiano. Infatti, in formule, la normalizzazione risulta essere

$$\begin{aligned} \int p(\mathbf{x})d\mathbf{x} &= \int p(\mathbf{x}')Jd\mathbf{x}' \\ &= \int p'(\mathbf{x}')d\mathbf{x}' \\ &= 1, \end{aligned}$$

dove $p'(\mathbf{x}') = Jp(\mathbf{x}')$ è la PDF nel nuovo sistema di coordinate, che si normalizza rispetto alle proprie variabili aleatorie \mathbf{x}' .

Osservazione 1 *Si noti che se $p(\mathbf{x})$ e $p'(\mathbf{x}')$ sono funzioni non negative e normalizzate allora esse sono PDF. Da questo si osserva che sebbene $p(\mathbf{x}')$ sia non negativa essa non è normalizzata e non definisce quindi una PDF:*

infatti è semplicemente la PDF $p(\mathbf{x})$ riscritta nelle nuove variabili \mathbf{x}' . Ciò comporta anche una differente dimensione fisica tra $p'(\mathbf{x}')$ e $p(\mathbf{x})$: la seconda ha infatti la stessa dimensione fisica di $p(\mathbf{x})$ e quindi diversa da $p'(\mathbf{x}')$.

Sia

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(D_i p) + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(D_{ij} p), \quad (4.1)$$

l'equazione di Fokker-Planck nell'insieme di variabili aleatorie $\{x_i\}$ (es. sistema di riferimento cartesiano) e D_i, D_{ij} i cosiddetti coefficienti di Kramers-Moyal [106]. Allora, seguendo H. Risken ([106] p. 88-91), la (4.1) assume la forma

$$\left(\frac{\partial p'}{\partial t}\right)_{x'} = -\frac{\partial}{\partial x'_k}(D'_k p') + \frac{\partial^2 p'}{\partial x'_k \partial x'_r}(D'_{kr} p'), \quad (4.2)$$

che risulta essere l'equazione di Fokker-Planck nelle nuove variabili $\{x'_k\}$, dove $p'(\mathbf{x}') = Jp(\mathbf{x})$ è la PDF che normalizza rispetto alle nuove variabili aleatorie ed evolve riproducendo le stesse caratteristiche statistiche della (4.1). I nuovi coefficienti di Kramers-Moyal D'_k, D'_{kr} sono legati ai precedenti dalle formule

$$D'_k = \left(\frac{\partial x'_k}{\partial t}\right)_x + \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} D_i + \frac{\partial^2 x'_k}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}, \quad (4.3)$$

$$D'_{kr} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial x'_r}{\partial x_j} D_{ij}. \quad (4.4)$$

Il simbolo $(\partial/\partial t)_\xi$ in (4.2) e (4.3) indica che le variabili $\{\xi_i\}$ sono mantenute costanti. In (4.3), quindi, il primo termine a destra dell'uguale (RHS) è diverso da zero solo nel caso in cui la trasformazione dipenda esplicitamente dal tempo t .

Come già osservato nel capitolo 3, attraverso i coefficienti di Kramers-Moyal, è possibile associare ad un'equazione di Fokker-Planck una equazione differenziale stocastica nelle stesse variabili aleatorie. La generica equazione differenziale stocastica nelle variabili $\{x_i\}$ è (3.37)

$$dx_i = h_i dt + b_{ij} dW_j, \quad (4.5)$$

dove dW_j è un processo di Wiener con varianza dt ed i coefficienti di Kramers-Moyal sono

$$D_i = h_i + \frac{1}{2} b_{kj} \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_k}, \quad (4.6)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{2} b_{ik} b_{jk}. \quad (4.7)$$

Nel nuovo sistema di variabili $\{x'_k\}$ l'equazione (4.5) diventa

$$dx'_k = h'_k dt + b'_{kr} dW_r, \quad (4.8)$$

dove

$$h'_k = \left(\frac{\partial x'_k}{\partial t} \right)_x + \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} h_i \quad ; \quad b'_{kr} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} b_{ir}. \quad (4.9)$$

Applicando le formule (4.6-4.7) alla (4.9) si ottengono nuovamente i coefficienti trasformati di Kramers-Moyal (4.3-4.4).

4.1.2 Formulazione Well-Mixed ed indeterminazione

I processi di dispersione relativa turbolenta possono essere modellati per mezzo di un processo markoviano del primo ordine (capitolo 3) e conseguentemente i modelli stocastici lagrangiani sono formulati nello spazio delle fasi.

In questo caso dunque, la notazione del paragrafo precedente sarà specificata in $\{x_i; i = 1, 6\}$ con $\{x_i = r_i; i = 1, 3\}$ e $\{x_i = u_{i-3}; i = 4, 6\}$ dove \mathbf{r} e \mathbf{u} sono rispettivamente il vettore separazione ed il vettore differenza di velocità di ogni coppia di particelle di fluido. Con r e u saranno indicati i moduli dei vettori \mathbf{r} e \mathbf{u} .

L'idea originale di O.A. Kurbanmuradov [65] fu di riscrivere le componenti cartesiane del vettore separazione \mathbf{r} in un opportuno sistema di riferimento sferico, nel quale la variabile spaziale è il modulo della separazione stessa, qui indicato con r . Il nuovo sistema di riferimento risulta essere non inerziale perchè in moto lagrangianamente con le particelle. Infine, il vettore differenza di velocità \mathbf{u} viene scomposto nelle sue componenti longitudinale e trasversali rispetto al raggio congiungente.

Il cambio di variabili che ne risulta è $\{x'_i = r'_i; i = 1, 3\}$, $\{x'_i = u'_{i-3}; i = 4, 6\}$ con $\mathbf{r}' = (r, \theta, \phi)$ e $\mathbf{u}' = (u_{\parallel}, u'_{\perp}, u''_{\perp})$ espressi esplicitamente come segue:

$$\begin{cases} r_1 = r \sin \theta \cos \phi \\ r_2 = r \sin \theta \sin \phi \\ r_3 = r \cos \theta \\ u_1 = u_{\parallel} \sin \theta \cos \phi - u'_{\perp} \cos \theta \cos \phi + u''_{\perp} \sin \phi \\ u_2 = u_{\parallel} \sin \theta \sin \phi - u'_{\perp} \cos \theta \sin \phi - u''_{\perp} \cos \phi \\ u_3 = u_{\parallel} \cos \theta + u'_{\perp} \sin \theta \end{cases}, \quad (4.10)$$

dove $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$ sono gli angoli polare e azimutale, u_{\parallel} e $\{u'_{\perp}, u''_{\perp}\}$ le componenti del vettore \mathbf{u} rispettivamente longitudinale e trasversali ad r . Vettorialmente si ha $u_{\parallel} = \mathbf{u} \cdot \hat{e}_r$, $u'_{\perp} = \mathbf{u} \cdot \hat{e}_{\theta}$, $u''_{\perp} = \mathbf{u} \cdot \hat{e}_{\phi}$, dove $\hat{e}_r = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, $\hat{e}_{\theta} = (-\cos \theta \cos \phi, -\cos \theta \sin \phi, \sin \theta)$ $\hat{e}_{\phi} = (\sin \phi, -\cos \phi, 0)$.

Osservazione 1 *E' opportuno notare a questo punto che u'_{\perp} e u''_{\perp} giacciono entrambi nel piano ortogonale a u_{\parallel} e sono perpendicolari tra loro, quindi risultano univocamente determinati dal modulo $u_{\perp} = (u'^2_{\perp} + u''^2_{\perp})^{1/2}$ ed un angolo $\alpha \in [0; 2\pi]$, il quale, per isotropia, ha peso statistico costante ed*

uguale a $1/(2\pi)$. Le variabili u'_\perp e u''_\perp sono perciò legate dalla trasformazione polare

$$\begin{cases} u'_\perp = u_\perp \cos \alpha \\ u''_\perp = u_\perp \sin \alpha \end{cases}, \quad (4.11)$$

e per isotropia, la PDF p espressa nelle nuove coordinate $\mathbf{u}' = \{u_\parallel, u_\perp, \alpha\}$ non è funzione dell'angolo α . Ne segue che la normalizzazione è

$$\begin{aligned} \int_{R^3} p'(\mathbf{u}') d\mathbf{u}' &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} p(u_\parallel, u_\perp) u_\perp du_\parallel du_\perp d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} p(u_\parallel, u_\perp) 2\pi u_\perp du_\parallel du_\perp \\ &= 1, \end{aligned}$$

Lo jacobiano della sola trasformazione spaziale risulta essere $J_r = r^2 \sin \theta$ e quello della sola trasformazione di velocità (4.10-4.11) $J_u = u_\perp$. Quindi, lo jacobiano dell'intera trasformazione nello spazio delle fasi è $J = J_r J_u = r^2 u_\perp \sin \theta$.

Ricordando l'espressione dell'equazione di Fokker-Planck in coordinate cartesiane (3.32), dalla (4.1) si deduce che i coefficienti di Kramers-Moyal sono

$$D_i = u_i, i = 1, 3 \quad ; \quad D_i = a_i, i = 4, 6, \quad (4.12)$$

$$D_{ij} = C_0 \varepsilon \delta_{ij}, i, j = 4, 6, \quad (4.13)$$

dove \mathbf{a} è l'accelerazione relativa tra due particelle di fluido, C_0 la costante universale lagrangiana di Kolmogorov e ε il tasso medio di dissipazione di energia. Come già visto nel capitolo 3, la scelta di D_{ij} è consistente con la funzione di struttura lagrangiana del secondo ordine. Inoltre, si ricorda che l'indipendenza del coefficiente di rumore D_{ij} dalla corrispondente variabile aleatoria u_i rende identici i calcoli degli integrali stocastici per qualsivoglia schema (capitolo 3). La costanza di ε implicitamente elimina gli effetti dovuti all'intermittenza, sebbene nel caso dell'intermittenza lagrangiana la funzione di struttura del secondo ordine, in un approccio multifrattale, conserva la stessa legge di potenza in seguito alla linearità nel tempo (4.13) [17, 18]. Quindi, dalle formule (4.3-4.4) si ottengono i coefficienti di Kramers-Moyal nelle nuove variabili

$$D'_r = u_\parallel \quad , \quad D'_\phi = -\frac{u_\perp}{r} \frac{\sin \alpha}{\sin \theta} \quad , \quad D'_\theta = -\frac{u_\perp}{r} \cos \alpha, \quad (4.14)$$

$$D'_\parallel = a_\parallel + \frac{u_\perp^2}{r} \quad , \quad D'_\perp = \frac{u_i a_i - u_\parallel a_\parallel}{u_\perp} - \frac{u_\parallel u_\perp}{r} + \frac{C_0 \varepsilon}{u_\perp}, \quad (4.15)$$

$$D'_\alpha = \frac{\cos \alpha (\hat{e}_\phi \cdot \mathbf{a}) - \sin \alpha (\hat{e}_\theta \cdot \mathbf{a})}{u_\perp}, \quad (4.16)$$

$$D'_{\parallel\parallel} = D'_{\perp\perp} = u_\perp^2 D'_{\alpha\alpha} = C_0 \varepsilon, \quad (4.17)$$

$$D'_{\parallel\perp} = D'_{\perp\parallel} = D'_{\parallel\alpha} = D'_{\alpha\parallel} = D'_{\perp\alpha} = D'_{\alpha\perp} = 0. \quad (4.18)$$

Nell'applicare la (4.3) il primo termine in RHS è nullo poiché la trasformazione non dipende esplicitamente da t .

Dalla (4.2), con i coefficienti riportati in (4.14-4.18), si ottiene l'equazione di Fokker-Planck che governa l'evoluzione della PDF lagrangiana nel nuovo sistema di riferimento.

Si noti che, nelle formule (4.14-4.15), i termini D'_ϕ e D'_θ non dipendono rispettivamente da ϕ e θ mentre gli altri termini non dipendono da entrambe le variabili angolari spaziali. Nel caso isotropo, le variabili ϕ e θ sono indipendenti dalle altre e la loro PDF marginale risulta essere una costante. Quindi, nell'equazione di Fokker-Planck (4.1) i termini di evoluzione rispetto θ e ϕ sono indenticamente nulli per diretto effetto dell'operatore di derivazione.

Inoltre, si osserva che, sempre per isotropia, anche la variabile angolare α è indipendente e che, anche in questo caso, la sua PDF marginale è una costante. Poiché il coefficiente $D'_{\alpha\alpha}$ non dipende da α (4.17), ne segue che il corrispondente termine di tipo diffusivo è nullo. Infine, per la forma propria di D'_α , si ha che integrando rispetto α l'equazione di Fokker-Planck il termine caratterizzato dalla derivata in α scompare.

Concludendo, rinominati $D'_\parallel = \chi_\parallel$ e $D'_\perp = \chi_\perp$, per evidenziarne il ruolo di funzioni incognite da investigare nel nuovo sistema di riferimento, l'equazione di evoluzione per la PDF lagrangiana p'_L assume la forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'_L}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial r}(u_\parallel p'_L) - \frac{\partial}{\partial u_\parallel}(\chi_\parallel p'_L) - \frac{\partial}{\partial u_\perp}(\chi_\perp p'_L) \\ & + C_0\varepsilon \left\{ \frac{\partial^2 p'_L}{\partial u_\parallel^2} + \frac{\partial^2 p'_L}{\partial u_\perp^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

e l'equazione differenziale stocastica associata alla (4.19) sarà

$$\begin{cases} dr = u_\parallel dt \\ du_\parallel = \chi_\parallel dt + \sqrt{2C_0\varepsilon} dW_\parallel \\ du_\perp = \chi_\perp dt + \sqrt{2C_0\varepsilon} dW_\perp \end{cases}, \quad (4.20)$$

dove dW_\parallel e dW_\perp sono ancora processi di Wiener con varianza dt .

Si osserva immediatamente che la scelta di adottare questo sistema di riferimento ha ridotto il numero delle equazioni stocastiche e, quindi, le variabili aleatorie da modellare, da 6, quante erano quelle necessarie nel sistema cartesiano, a 3.

Applicando ora la formula integrale di Thomson-Novikov (2.17) nelle nuove variabili (2.23), è possibile determinare anche in questo caso la *Well-Mixed Condition* (3.83). Dall'equazione di Fokker-Planck (4.19) si ottiene

$$\frac{\partial p'_E}{\partial t} = - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_\parallel p'_E) - \frac{\partial}{\partial u_\parallel}(\chi_\parallel p'_E) - \frac{\partial}{\partial u_\perp}(\chi_\perp p'_E)$$

$$+ C_0\varepsilon \left\{ \frac{\partial^2 p'_E}{\partial u_{\parallel}^2} + \frac{\partial^2 p'_E}{\partial u_{\perp}^2} \right\}. \quad (4.21)$$

In genere ciò che è noto, o si suppone noto, è la PDF euleriana p_E nelle coordinate cartesiane e, poichè se ne farà comunque uso in seguito per confrontarsi con altri risultati in letteratura, la (4.21) si riscrive come segue

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_E}{\partial t} = & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_{\parallel} p_E) - \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} (\chi_{\parallel} p_E) - \frac{1}{u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} [(\chi_{\perp} u_{\perp} - C_0\varepsilon) p_E] \\ & + C_0\varepsilon \left\{ \frac{\partial^2 p_E}{\partial u_{\parallel}^2} + \frac{1}{u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \left(u_{\perp} \frac{\partial p_E}{\partial u_{\perp}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

dove $p'_E = u_{\perp} p_E$.

Osservando le formule (4.21-4.22) si nota che anche in questo caso, così come nel caso cartesiano (capitolo 3), il problema non è univocamente determinato. Sebbene infatti, la p_E possa essere una informazione esterna al problema, esattamente come nel caso cartesiano, si ha però un'unica equazione per le due funzioni incognite χ_{\parallel} e χ_{\perp} . Dunque, anche in questo nuovo sistema di coordinate, il problema è indeterminato. Infatti, dalla (4.21) si ha

$$\chi_{\parallel} = C_0\varepsilon \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} \ln p'_E + \frac{\Phi_{\parallel}}{p'_E}, \quad (4.23)$$

$$\chi_{\perp} = C_0\varepsilon \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \ln p'_E + \frac{\Phi_{\perp}}{p'_E}, \quad (4.24)$$

fatte le generiche ipotesi

$$\chi_{\parallel} p'_E, \Phi_{\parallel} \rightarrow 0, \quad u_{\parallel} \rightarrow -\infty,$$

$$\chi_{\perp} p'_E, \Phi_{\perp} \rightarrow 0, \quad u_{\perp} \rightarrow 0,$$

dove

$$\frac{\partial \Phi_{\parallel}}{\partial u_{\parallel}} + \frac{\partial \Phi_{\perp}}{\partial u_{\perp}} = -\frac{\partial p'_E}{\partial t} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_{\parallel} p'_E). \quad (4.25)$$

Dalla (4.25) si nota che qualunque coppia di funzioni scalari $\tilde{\Phi}_{\parallel}$ e $\tilde{\Phi}_{\perp}$, definite come

$$\tilde{\Phi}_{\parallel} = \Phi_{\parallel} + \Phi_{\parallel}^*, \quad \tilde{\Phi}_{\perp} = \Phi_{\perp} + \Phi_{\perp}^*,$$

dove Φ_{\parallel} e Φ_{\perp} sono le stesse di (4.23-4.25), è ancora soluzione della (4.25) se

$$\frac{\partial \Phi_{\parallel}^*}{\partial u_{\parallel}} + \frac{\partial \Phi_{\perp}^*}{\partial u_{\perp}} = 0. \quad (4.26)$$

Sebbene dunque, grazie all'isotropia, il processo fisico della dispersione relativa, nel nuovo sistema di riferimento, sia descritto da sole 3 variabili aleatorie $\{r, u_{\parallel}, u_{\perp}\}$, piuttosto che le 6 del caso cartesiano, è ancora necessaria la ricerca di una condizione per determinare in modo univoco il modello.

4.1.3 Analogo cartesiano

Poiché l'uso delle coordinate cartesiane consente di cogliere in maniera più intuitiva le caratteristiche fisiche dei modelli, si deriverà ora l'analogo in coordinate cartesiane della formulazione precedentemente esposta. Il risultato di questa analisi è una formulazione le cui statistiche sono consistenti con quelle del modello originale.

Come evidenziato da O.A. Kurbanmuradov [65], nel caso di un processo isotropo, la differenza di accelerazione a_i può essere espressa per mezzo di due funzioni scalari φ e ψ come segue

$$a_i(u_{\parallel}, u_{\perp}, r, t) = \varphi(u_{\parallel}, u_{\perp}, r, t) \frac{r_i}{r} + \psi(u_{\parallel}, u_{\perp}, r, t) \frac{u_i}{u}. \quad (4.27)$$

Per determinare l'analogo cartesiano (4.27) di un modello in coordinate sferiche, occorre dunque determinare le due funzioni incognite φ e ψ .

Per mezzo delle formule

$$u_i a_i = \varphi u_{\parallel} + \psi u \quad , \quad u_{\parallel} a_{\parallel} = \varphi u_{\parallel} + \psi u_{\parallel}^2 / u,$$

ricavate direttamente dalla (4.27), si possono riscrivere le espressioni in (4.15) come segue

$$D'_{\parallel} = \chi_{\parallel}(u_{\parallel}, u_{\perp}, r, t) = \varphi + \psi \frac{u_{\parallel}}{u} + \frac{u_{\perp}^2}{r}, \quad (4.28)$$

$$D'_{\perp} = \chi_{\perp}(u_{\parallel}, u_{\perp}, r, t) = \psi \frac{u_{\perp}}{u} - \frac{u_{\parallel} u_{\perp}}{r} + \frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}} \quad (4.29)$$

$$= \frac{\varphi u_{\parallel} + \psi u}{u_{\perp}} - \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \chi_{\parallel} + \frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}}. \quad (4.30)$$

Infine, invertendo le formule (4.28-4.29), si ottiene

$$\varphi = \chi_{\parallel} - \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \chi_{\perp} - \frac{u^2}{r} + \frac{u_{\parallel}}{u_{\perp}} \frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}}, \quad (4.31)$$

$$\psi = \frac{u}{u_{\perp}} \chi_{\perp} + \frac{u u_{\parallel}}{r} - \frac{u}{u_{\perp}} \frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}}, \quad (4.32)$$

e quindi

$$a_i = \chi_{\parallel} \frac{r_i}{r} + \frac{1}{u_{\perp}} \left(u_i - u_{\parallel} \frac{r_i}{r} \right) \left(\chi_{\perp} - \frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}} \right) - \frac{u^2}{r^2} r_i + \frac{u_{\parallel}}{r} u_i. \quad (4.33)$$

La formula (4.33) può essere scritta anche in termini di p_E , specificando la funzione incognita χ_{\perp} . Infatti, sostituendo la (4.29) nella (4.22), si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_E}{\partial t} = & -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_{\parallel} p_E) - \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} (\chi_{\parallel} p_E) - \frac{1}{u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \left[\left(u_{\perp}^2 \frac{\psi}{u} - u_{\perp}^2 \frac{u_{\parallel}}{r} \right) p_E \right] \\ & + C_0 \varepsilon \left\{ \frac{\partial^2 p_E}{\partial u_{\parallel}^2} + \frac{1}{u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \left[u_{\perp} \frac{\partial p_E}{\partial u_{\perp}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.34)$$

che, integrata in u_{\perp} con peso u_{\perp} , consente di determinare ψ come segue

$$\psi(u_{\parallel}, u_{\perp}; r, t) = C_0 \varepsilon \frac{u}{u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \ln p_E + \frac{u u_{\parallel}}{r} - \frac{u}{u_{\perp}^2 p_E} \Psi(u_{\parallel}, u_{\perp}; t, r), \quad (4.35)$$

dove

$$\Psi = \int_0^{u_{\perp}} \left\{ \frac{\partial p_E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} (\chi_{\parallel} p_E) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_{\parallel} p_E) - C_0 \varepsilon \frac{\partial^2 p_E}{\partial u_{\parallel}^2} \right\} u'_{\perp} du'_{\perp}. \quad (4.36)$$

Unendo la (4.31) e (4.35-4.36) si ottiene la formulazione cartesiana (4.27) in termini della PDF euleriana

$$a_i = \chi_{\parallel} \frac{r_i}{r} + \frac{1}{u_{\perp}} \left(u_i - u_{\parallel} \frac{r_i}{r} \right) \left(C_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \ln p_E - \frac{1}{u_{\perp} p_E} \Psi \right) - \frac{u^2}{r^2} r_i + \frac{u_{\parallel}}{r} u_i. \quad (4.37)$$

Applicando regole di algebra vettoriale, si nota che il termine in (4.33) e (4.37)

$$-\frac{u^2}{r^2} r_i + \frac{u_{\parallel}}{r} u_i,$$

è la componente i -esima del prodotto vettore

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{u}, \quad (4.38)$$

e che quindi può essere scritto anche come

$$-\frac{u^2}{r^2} r_i + \frac{u_{\parallel}}{r} u_i = \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k.$$

Allora, in forma vettoriale, la (4.33) assume l'espressione

$$\mathbf{a} = \chi_{\parallel} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{1}{u_{\perp}} \left(\mathbf{u} - u_{\parallel} \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \left(\chi_{\perp} - \frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}} \right) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}. \quad (4.39)$$

La (4.39) riproduce in modo esplicito, attraverso gli elementi del modello stocastico, l'effetto di una rotazione nelle equazioni cinematiche. Il vettore

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{r^2} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}), \quad (4.40)$$

risulta essere la velocità angolare del sistema.

Infatti, considerato un generico vettore \mathbf{Y} allora è noto valere l'identità ([47] p. 29)

$$\frac{d_a \mathbf{Y}}{dt} = \frac{d_r \mathbf{Y}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Y}, \quad (4.41)$$

dove d_a/dt indica la variazione nel tempo così come avviene nel sistema fisso, mentre d_r/dt quella nel sistema in moto e $\boldsymbol{\Omega}$ è la velocità angolare di rotazione del sistema in moto rispetto a quello fisso.

Specificando il generico vettore \mathbf{Y} con il vettore differenza di velocità \mathbf{u} , la (4.41) diventa

$$\frac{d_a \mathbf{u}}{dt} = \frac{d_r \mathbf{u}}{dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}. \quad (4.42)$$

Quindi, dato il nuovo sistema di riferimento, il vettore \mathbf{u} può essere scomposto in una componente longitudinale ed una trasversa al vettore congiungente \mathbf{r} come segue

$$\mathbf{u} = u_{\parallel} \frac{\mathbf{r}}{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \quad (4.43)$$

poiché, come è noto, il prodotto vettoriale di un generico vettore con \mathbf{r} produce un vettore ortogonale ad \mathbf{r} . Dalla (4.43) si ottiene nuovamente la definizione di $\boldsymbol{\Omega}$ data in (4.40).

Essendo il sistema di riferimento adottato un sistema non inerziale ed in moto lagrangianamente con le particelle di fluido, è lecito aspettarsi che la velocità angolare non sia una quantità costante, ma piuttosto dipendente dallo stato di ogni singola coppia.

Tale schema risulta essere coerente con l'immagine di due particelle che ruotano, nell'intervallo di tempo dt , attorno ad un asse passante per il loro centro di massa che è in moto ed il piano su cui esse giacciono e la loro velocità di rotazione cambiano con continuità nel tempo. Infatti, siano \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 le velocità delle due particelle ed m_p la loro massa, allora la quantità di moto nel centro di massa risulterà

$$m_p \mathbf{u}_1 + m_p \mathbf{u}_2 = m_p (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = 2m_p \mathbf{u}_{CM},$$

dove $\mathbf{u}_{CM} = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)/2$ è la velocità del centro di massa.

Indicato con ℓ_p il momento angolare di ciascuna particella questo è definito come

$$\ell_p = m_p (\mathbf{d} \times \dot{\mathbf{d}}),$$

dove \mathbf{d} è la distanza della particella dal centro di massa e $\dot{\mathbf{d}}$ la sua derivata temporale. Nel caso affrontato saranno

$$\mathbf{d} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{CM} = \frac{\mathbf{r}}{2}, \quad \dot{\mathbf{d}} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{CM} = \frac{\mathbf{u}}{2},$$

come derivato anche dalla relazione

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{CM} = \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2}{2} = \frac{\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2}{2} = \frac{\mathbf{u}}{2},$$

e quindi

$$\ell_p = \frac{m_p}{4} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}). \quad (4.44)$$

Infine, indicati rispettivamente con ℓ ed I il momento angolare ed il momento d'inerzia del sistema, osservato che $\ell = 2\ell_p$, sarà

$$\ell = I\boldsymbol{\Omega} = \frac{m_p}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}).$$

Ora, considerando che il momento d'inerzia I_p di ciascuna particella è $I_p = m_p(r/2)^2$ e che $I = 2I_p = m_p r^2/2$ allora dalla (4.44)

$$m_p \frac{r^2}{2} \Omega = \frac{m_p}{2} (\mathbf{r} \times \mathbf{u}), \quad (4.45)$$

e quindi la (4.40).

Ricapitolando, l'equazione (4.42), completata con la (4.40), descrive gli aspetti di cinematica rotazionale associati al nostro specifico sistema di riferimento.

Come prima cosa, si osserva che la rotazione agisce a tutte le scale e questo produce effetti spaziali sul moto delle particelle anche per le scale maggiori della scala integrale dei vortici. Tuttavia, il confronto tra le scale di azione della rotazione e la scala integrale dei vortici non ha consistenza poichè la rotazione ed i suoi effetti spaziali sono dovuti al sistema di riferimento adottato, mentre la scala integrale è una caratteristica dinamica del processo poichè derivata dalla correlazione delle velocità. Più semplicemente, u_{\parallel} e u_{\perp} saranno sempre le componenti longitudinale e trasverse del vettore differenza di velocità rispetto alla congiungente le particelle per qualunque valore di r , indipendentemente dalla scala integrale. La velocità angolare, comunque, come si osserva dalla (4.40), diminuisce con una legge di potenza.

E' interessante a questo punto studiare, attraverso il metodo proposto da B.L. Sawford [113], gli effetti medi indotti dal termine di rotazione

$$\mathbf{R} = \Omega \times \mathbf{u}. \quad (4.46)$$

Ricordando la definizione di rotazione [113]

$$d\mathbf{s} = \mathbf{u} \times d\mathbf{u}, \quad (4.47)$$

allora, noto $d\mathbf{u}$ dal modello stocastico (3.80), mediando si ottiene

$$\langle s \rangle = \langle \mathbf{a} \times \mathbf{u} \rangle dt. \quad (4.48)$$

Esprimendo \mathbf{a} come in (4.39), è possibile scomporre la rotazione in due termini uno dei quali è dato da \mathbf{R} (4.46). Sia quindi $d\mathbf{s}^R$ la rotazione indotta da \mathbf{R} (4.46)

$$\langle d\mathbf{s}^R \rangle = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{R} \rangle dt = \langle \mathbf{u} \times (\Omega \times \mathbf{u}) \rangle dt,$$

che dall'identità

$$\mathbf{u} \times (\Omega \times \mathbf{u}) = \Omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \Omega),$$

diventa

$$\langle d\mathbf{s}^R \rangle = \langle \Omega(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \rangle dt - \langle \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \Omega) \rangle dt,$$

e per ogni singola componente

$$\langle ds_i^R \rangle = \langle \Omega_i(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \rangle dt - \langle u_i(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \rangle dt. \quad (4.49)$$

Specificando $\boldsymbol{\Omega}$ secondo la (4.40), la formula (4.49) diventa

$$\begin{aligned} \langle ds_i^R \rangle = \frac{1}{r^2} \{ & \langle (\varepsilon_{ijk} r_j u_k) u_i u_i + (\varepsilon_{ijk} r_j u_k) u_j u_j + (\varepsilon_{ijk} r_j u_k) u_k u_k \rangle - \\ & \langle u_i u_i (\varepsilon_{ijk} r_j u_k) + u_i u_j (\varepsilon_{jki} r_k u_i) + u_i u_k (\varepsilon_{kij} r_i u_j) \rangle \} dt, \end{aligned}$$

e per l'isotropia

$$\begin{aligned} \langle ds_i^R \rangle = \frac{1}{r^2} \{ & \langle (\varepsilon_{ijk} r_j u_k) u_j u_j + (\varepsilon_{ijk} r_j u_k) u_k u_k \rangle - \\ & \langle u_i u_j (\varepsilon_{jki} r_k u_i) + u_i u_k (\varepsilon_{kij} r_i u_j) \rangle \} dt = 0. \quad (4.50) \end{aligned}$$

Quindi, si può concludere che il sistema di riferimento adottato introduce un termine di rotazione (4.46) che cinematicamente segue la formula (4.42): il sistema ruota con velocità angolare come in (4.40), ma la rotazione media indotta risulta essere nulla (4.50).

Un interessante studio sugli effetti indotti dalla rotazione sulla dispersione nel caso di una rotazione costante è stato svolto da M.S. Borgas *et al.* [19]. In questo lavoro, gli autori, utilizzando un modello stocastico lagrangiano per la dispersione assoluta, osservano che la rotazione da loro considerata riduce sensibilmente la dispersione.

4.1.4 Equazioni dinamiche e coefficienti stocastici

Le equazioni che governano la dinamica dei fluidi sono le equazioni di Navier-Stokes (1.1). In particolare, nel sistema di riferimento adottato, l'effetto dovuto alla rotazione, con la stessa notazione della (4.41), si ha nell'uguaglianza

$$\frac{D_a \mathbf{u}}{Dt} = \frac{D_r \mathbf{u}}{Dt} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}, \quad (4.51)$$

e nelle singole componenti cartesiane:

$$\frac{D_a u_i}{Dt} = \frac{D_r u_i}{Dt} + \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k. \quad (4.52)$$

Nel sistema di riferimento rotante, il vettore \mathbf{r} risulta determinato ad ogni istante, il suo variare nel tempo determina un cambiamento del sistema di riferimento stesso, quindi, per ciascun istante, si avrà

$$\frac{D_r \mathbf{r}}{Dt} = 0. \quad (4.53)$$

Nel sistema rotante cioè non si produce velocità ma vi si proietta quella generata nel sistema fisso. Le variazioni di \mathbf{r} nel tempo, definiscono nel

sistema rotante solo un nuovo asse su cui proiettare il vettore \mathbf{u} . Questa peculiarità si evidenzia in modo particolare nella derivata della componente longitudinale della differenza di velocità, $u_{\parallel} = u_i r_i / r$, che nei due sistemi di riferimento vale

$$\frac{D_a u_{\parallel}}{Dt} = \frac{D_a \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{Dt \cdot r} + \frac{u_{\perp}^2}{r}, \quad (4.54)$$

$$\frac{D_r u_{\parallel}}{Dt} = \frac{D_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{Dt \cdot r}. \quad (4.55)$$

Moltiplicando scalarmente la (4.51) per \mathbf{r}/r e sommando sugli indici ripetuti si ottiene

$$\frac{D_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{Dt \cdot r} = \frac{D_a \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{Dt \cdot r} + \frac{u_{\perp}^2}{r}, \quad (4.56)$$

noto che $(\Omega \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{r}/r = -u_{\perp}^2/r$. Sostituendo la (4.54) nella (4.56) si ha

$$\frac{D_r \mathbf{u} \cdot \mathbf{r}}{Dt \cdot r} = \frac{D_a u_{\parallel}}{Dt}. \quad (4.57)$$

Dall'identità (4.57) può essere ricavata la formula

$$\frac{D_r \mathbf{u}}{Dt} = \frac{D_a u_{\parallel} \mathbf{r}}{Dt \cdot r}, \quad (4.58)$$

che si prova in maniera indiretta: infatti, moltiplicando scalarmente per \mathbf{r}/r a destra e sinistra dell'uguale e sommando sugli indici ripetuti si ottiene di nuovo la (4.57) che è ritenuta corretta. Infine, attraverso la (4.58) l'equazione (4.51) diventa

$$\frac{D_a \mathbf{u}}{Dt} = \frac{D_a u_{\parallel} \mathbf{r}}{Dt \cdot r} + \Omega \times \mathbf{u}. \quad (4.59)$$

Ora, come derivato da D.J. Thomson [132], la media d'insieme condizionata della legge dinamica è legata ai coefficienti stocastici (capitolo 3). Quindi, rappresentare in media d'insieme la (4.59) consente di esprimere l'equazione dinamica (4.51) in termini dei coefficienti stocastici. Così, indicata con il simbolo $\langle \cdot | \mathbf{u}, \mathbf{r}, t \rangle$ la media condizionata, la (4.59) diventa

$$\left\langle \frac{D_a \mathbf{u}}{Dt} | \mathbf{u}, \mathbf{r}, t \right\rangle = \left\langle \frac{D_a u_{\parallel} \mathbf{r}}{Dt \cdot r} | \mathbf{u}, \mathbf{r}, t \right\rangle + \Omega \times \mathbf{u}, \quad (4.60)$$

e per ciascuna componente cartesiana,

$$\left\langle \frac{D_a u_i}{Dt} | \mathbf{u}, \mathbf{r}, t \right\rangle = \left\langle \frac{D_a u_{\parallel}}{Dt} \frac{r_i}{r} | \mathbf{u}, \mathbf{r}, t \right\rangle + \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k. \quad (4.61)$$

Caratteristica propria della media condizionata $\langle \cdot | \mathbf{u}, \mathbf{r}, t \rangle$ è il fatto che questa risulta essere funzione di $\{\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\}$ e calcolata per quei determinati valori di $\{\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\}$. Pertanto, se viene calcolata la media di una variabile aleatoria, come l'accelerazione impressa dalla legge dinamica, la variabile aleatoria scompare (per effetto dell'integrazione) e resta una funzione delle variabili

$\{\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\}$; se invece la media viene calcolata per una funzione delle variabili $\{\mathbf{u}, \mathbf{r}, t\}$ quello che si ottiene è la stessa funzione di partenza (essendo questa non più aleatoria) e calcolata con quei determinati valori delle variabili. In questo caso quindi, il termine $\varepsilon_{ijk}\Omega_j u_k$ non sente l'operazione di media. Allo stesso modo si potrà dire che: la media del prodotto di una qualunque funzione aleatoria f per una delle variabili condizionate risulterà il prodotto della media condizionata della funzione f per la variabile condizionata. In conclusione, le variabili condizionate si comportano da semplici parametri e, ad esempio, nel caso del prodotto $f r_i/r$ vale

$$\langle f \frac{r_i}{r} | \mathbf{u}, \mathbf{r}, t \rangle = \langle f | \mathbf{u}, \mathbf{r}, t \rangle \frac{r_i}{r}.$$

In particolare, come derivato D.J. Thomson [132] e riproposto nel capitolo 3, si ha

$$a_i = \langle \frac{D_a u_i}{Dt} | \mathbf{u}, \mathbf{r}, t \rangle + \frac{C_0 \varepsilon}{p_E} \frac{\partial p_E}{\partial u_i}, \quad (4.62)$$

che combinata con la (4.54), moltiplicata scalarmente per \mathbf{r}/r e sommando sugli indici ripetuti fornisce l'espressione

$$\langle \frac{D_a u_{\parallel}}{Dt} | \mathbf{u}, \mathbf{r}, t \rangle = a_{\parallel} + \frac{u_{\perp}^2}{r} - \frac{C_0 \varepsilon}{p_E} \frac{\partial p_E}{\partial u_{\parallel}}, \quad (4.63)$$

dove si è utilizzata la formula

$$\frac{\partial p_E}{\partial u_i} \frac{r_i}{r} = \frac{\partial p_E}{\partial u_{\parallel}},$$

ricavabile direttamente attraverso le proprietà delle derivate; noto che funzionalmente $p_E(\mathbf{u}; r) = p_E(u_{\parallel}, u_{\perp}; r)$ con $u_{\parallel} = u_i r_i / r$ e $u_{\perp} = (u_i u_i - u_{\parallel}^2)^{1/2}$.

Moltiplicando la (4.63) per r_i/r si ottiene per ciascuna componente

$$\langle \frac{D_a u_{\parallel}}{Dt} | \mathbf{u}, \mathbf{r}, t \rangle \frac{r_i}{r} = \left(a_{\parallel} + \frac{u_{\perp}^2}{r} \right) \frac{r_i}{r} - \frac{C_0 \varepsilon}{p_E} \frac{\partial p_E}{\partial u_i}, \quad (4.64)$$

dove si è utilizzata la formula

$$\frac{\partial p_E}{\partial u_{\parallel}} \frac{r_i}{r} = \frac{\partial p_E}{\partial u_i},$$

provata indirettamente, come in (4.57-4.58), osservando che moltiplicando per r_i/r e sommando sugli indici ripetuti si giunge ad un risultato corretto. Infine, dalle equazioni (4.61-4.62) si ha

$$\langle \frac{D_a u_{\parallel}}{Dt} | \mathbf{u}, \mathbf{r}, t \rangle \frac{r_i}{r} = a_i - \frac{C_0 \varepsilon}{p_E} \frac{\partial p_E}{\partial u_i} - \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k, \quad (4.65)$$

che sostituita nella (4.64) la trasforma in

$$a_i - \frac{C_0 \varepsilon}{p_E} \frac{\partial p_E}{\partial u_i} = \left(a_{\parallel} + \frac{u_{\perp}^2}{r} \right) \frac{r_i}{r} - \frac{C_0 \varepsilon}{p_E} \frac{\partial p_E}{\partial u_i} + \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k ,$$

da cui

$$a_i = \left(a_{\parallel} + \frac{u_{\perp}^2}{r} \right) \frac{r_i}{r} + \varepsilon_{ijk} \Omega_j u_k . \quad (4.66)$$

La formula (4.66) è consistente con il principale risultato esposto in questo lavoro. Combinando infatti la (4.66) con la (4.33) si ottiene la determinazione in modo univoco dei coefficienti di drift χ_{\parallel} e χ_{\perp} nel sistema di riferimento in moto. Le proprietà di tale risoluzione dell'indeterminazione sono analizzate e discusse nel modello proposto nel paragrafo 4.2.4.

Un ulteriore importante aspetto che emerge dalla combinazione delle equazioni dinamiche ed i coefficienti stocastici è quello associato alle quantità di elicità e vorticità. Le equazioni (4.61) e (4.66) sono consistenti con la (4.43), quindi il cambio di coordinate definisce per il vettore differenza di velocità la seguente trasformazione

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} , \quad (4.67)$$

dove r indica proprio l'appartenenza al sistema in rotazione ed $\boldsymbol{\Omega}$ è la stessa sin qui utilizzata e definita in (4.40).

Ricordando la definizione di elicità, densità di elicità e vorticità [81, 82] un loro analogo a due punti può essere considerato per il caso qui analizzato, esse possono essere indicate rispettivamente con $H(t)$, $h(\mathbf{r}, t)$ e $\omega(\mathbf{r}, t)$ e definite come segue

$$H(t) = \int_V h(\mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{r} , \quad \mathbf{r} \in V , V \subseteq R^3 , \quad (4.68)$$

$$h(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} , \quad (4.69)$$

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{u} . \quad (4.70)$$

Per la peculiare caratteristica del sistema rotante adottato, in moto lagrangianamente, si ha $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r}, t)$ da cui segue

$$h = 2\mathbf{u}_r \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{u}_r \cdot [(\mathbf{r} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega}] - \mathbf{u}_r \cdot \mathbf{r} (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot [(\mathbf{r} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega}] , \quad (4.71)$$

$$h = \mathbf{u}_r \cdot \{2\boldsymbol{\Omega} + [(\mathbf{r} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega}] - \mathbf{r} (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega})\} + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot [(\mathbf{r} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega}] , \quad (4.72)$$

mentre la vorticità

$$\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \boldsymbol{\Omega} - (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{r} , \quad (4.73)$$

e per ciascuna componente

$$\omega_i = 2\Omega_i + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \Omega_i - (\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) r_i . \quad (4.74)$$

Dalla (4.71) si osserva che anche per valori nulli di velocità nel sistema rotante, $\mathbf{u}_r = 0$, si ha $h \neq 0$. Il sistema presenta cioè sempre una elicità non nulla. Si osserva inoltre, seppur non appartenente al caso studiato, che per \mathbf{u}_r e $\boldsymbol{\Omega}$ costanti si ottiene $\boldsymbol{\omega} = 2\boldsymbol{\Omega}$ e $h = 2\mathbf{u}_r \cdot \boldsymbol{\Omega}$ [82].

4.2 Modelli

Come già sottolineato, sebbene nel nuovo sistema di riferimento adottato le variabili da modellare siano 3 ($\{r, u_{\parallel}, u_{\perp}\}$), piuttosto che le 6 ($\{r_i, u_i; i = 1, 3\}$) del caso cartesiano, resta ancora aperta la questione della determinazione in modo univoco dei coefficienti di drift (4.23-4.24), esattamente come nel caso cartesiano (capitolo 3).

Questa indeterminazione rende incompleta la formulazione dei processi di dispersione attraverso lo strumento dei metodi stocastici. Quindi, la specificazione finale ed operativa dei modelli richiede assunzioni ed ipotesi di vario genere.

In questo paragrafo sarà proposto un nuovo modello che non necessita dell'assunzione di indipendenza formulata da O.A. Kurbanmuradov (4.75) ed utilizza solo le proprietà cinematiche dei sistemi in rotazione già esposte nel paragrafo precedente.

4.2.1 Modello Quasi-Unidimensionale di Kurbanmuradov

L'idea avuta da O.A. Kurbanmuradov per determinare in modo univoco i modelli di dispersione assoluta [65] è stata poi sviluppata da O.A. Kurbanmuradov e collaboratori [109, 68, 110, 66], e da altri autori [22, 101, 36, 23].

Essa si fonda sull'assunzione che il coefficiente di drift associato alla differenza di velocità longitudinale, proiettata cioè lungo la congiungente le due particelle di fluido, non sia funzione della proiezione trasversa. Questa indipendenza funzionale si traduce nell'indipendenza statistica tra le due componenti. Tuttavia, questa indipendenza non si verifica per le statistiche generate dalle equazioni di Navier-Stokes, come dimostra uno studio del momento terzo [84, 38] e l'analisi dei dati ottenuti dalla simulazione numerica delle soluzioni dell'equazione di Navier-Stokes [12] presentata nel capitolo 5. Nonostante questo però è sicuramente utile studiare il lavoro di O.A. Kurbanmuradov per il suo valore di esempio originale.

Lo studio di O.A. Kurbanmuradov [65], nello stesso spirito di D.J. Thomson [133], si completa adottando una PDF per le differenze di velocità euleriane.

L'assunzione, che si può definire di Quasi-Uni-Dimensionalità, postulata da O.A. Kurbanmuradov [65] si formalizza come segue

Assunzione 1 (Quasi-Unidimensionalità) *Il coefficiente di KramersMoyal D'_{\parallel} associato alla variabile aleatoria u_{\parallel} è funzione solamente di u_{\parallel}, t, r :*

$$D'_{\parallel} = a_{\parallel} + \frac{u_{\perp}^2}{r} = \chi_{\parallel}(u_{\parallel}, t, r). \quad (4.75)$$

In seguito saranno chiamati modelli Q1D quelli nei quali si farà uso dell'assunzione (4.75).

Partendo dall'equazione di Fokker-Planck (4.21), o analogamente (4.22), si osserva che, adottando l'assunzione di Quasi-Unidimensionalità (4.75) ed integrando in u_\perp (con peso 2π nel caso della (4.21) e $2\pi u_\perp$ della (4.22)), si ottiene la formula

$$\frac{\partial p_\parallel}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_\parallel p_\parallel) - \frac{\partial}{\partial u_\parallel} (\chi_\parallel p_\parallel) + C_0 \varepsilon \frac{\partial^2 p_\parallel}{\partial u_\parallel^2}, \quad (4.76)$$

dove p_\parallel è la PDF marginale di u_\parallel

$$\begin{aligned} p_\parallel(u_\parallel; r, t) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty p'_E(u_\parallel, u_\perp, \alpha; r, t) d\alpha du_\perp \\ &= \int_0^\infty p_E(u_\parallel, u_\perp; r, t) 2\pi u_\perp du_\perp. \end{aligned}$$

Dalla (4.76) si giunge alla determinazione in modo univoco del coefficiente di drift χ_\parallel

$$\chi_\parallel = C_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial u_\parallel} \ln p_\parallel - \frac{1}{p_\parallel} \int_{-\infty}^{u_\parallel} \left\{ \frac{\partial p_\parallel}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u'_\parallel p_\parallel) \right\} du'_\parallel, \quad (4.77)$$

fatte le generiche ipotesi

$$\begin{aligned} (\chi_\perp u_\perp - C_0 \varepsilon) p_E - C_0 \varepsilon u_\perp \frac{\partial p_E}{\partial u_\perp} &\rightarrow 0, \quad u_\perp \rightarrow 0; \infty, \\ \chi_\parallel p_\parallel &\rightarrow 0, \quad u_\parallel \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

L'equazione differenziale stocastica associata all'equazione di evoluzione (4.76-4.77) è

$$\begin{cases} dr = u_\parallel dt \\ du_\parallel = \chi_\parallel(u_\parallel; t, r) dt + \sqrt{2C_0 \varepsilon} dW_\parallel \end{cases} \quad (4.78)$$

dove dW_\parallel è un rumore di Wiener con varianza dt .

Definita una PDF euleriana p_E , il modello Q1D di O.A. Kurbanmuradov [65] risulta definitivamente specificato nei suoi termini ed utilizzabile per le simulazioni. I risultati di simulazioni ottenute con il modello Q1D per diverse PDF euleriane sono riportati in [65, 66]. In tutti i casi si osserva un alto valore della costante di Richardson g , esso risulta, infatti, maggiore sia di quello ottenuto con i modelli gaussiani in coordinate cartesiane [133, 21] che sperimentalmente [55, 93] o numericamente [13]. Solo nel limite $C_0 \rightarrow \infty$ i valori convergono a quelli degli altri modelli stocastici.

4.2.2 Modello quadratico Quasi-Unidimensionale di Borgas-Yeung

Il modello proposto da M.S. Borgas e P.K. Yeung [23] combina assieme l'assunzione di Quasi-Unidimensionalità (4.75) con l'ipotesi che il coefficiente di drift sia una funzione quadratica della velocità, analogamente alla proposta per la dispersione assoluta [37] analizzata nel capitolo 3. Lo stesso approccio era stato adottato dagli stessi autori nel 1998 [22], tuttavia in questo recente lavoro [23], diversamente dagli altri, si considera la dipendenza dal numero di Reynolds.

Così, poichè il modello è inteso Quasi-Unidimensionale, nel caso di turbolenza stazionaria viene posto

$$a_i(u_{\parallel}, r) = \alpha(r)u_{\parallel}^2 + \beta(r)u_{\parallel} + \gamma(r) + b(u_{\parallel}, r), \quad (4.79)$$

dove $b(u_{\parallel}, r)$ è un termine aggiunto affinché la funzione soluzione dalla equazione di Fokker-Planck sia una PDF (si veda il paragrafo 3.2.4). Noti, dalla teoria, i primi 4 momenti statistici di u_{\parallel} , si procede alla determinazione di α , β e γ . La funzione $b(u_{\parallel}, r)$ viene risolta con considerazioni circa l'autosimilarità della PDF euleriana.

Il lavoro è supportato da confronti con simulazioni numeriche, tuttavia, il modello completo richiede l'uso di molti parametri, come riportato dagli stessi autori (p. 156):

... the success of our stochastic model depends on tuning the values of several model parameters. This tuning is quite complex, and while not a desirable feature, it is unavoidable.

In particolare, l'alto valore di C_0 utilizzato per avere accordo con i dati numerici, $C_0 = 9$, non si riscontra in letteratura [2].

4.2.3 Modello di Novikov-Pedrizzetti

Nel 1989 e nel 1992, E.A. Novikov [87, 88] analizzò la consistenza tra modelli stocastici ed equazioni di Navier-Stokes e propose un'espressione lineare per il termine di drift che considera anche effetti dovuti all'intermittenza. Nel 1994, G. Pedrizzetti ed E.A. Novikov ne proposero una generalizzazione [95]. Il coefficiente di drift viene determinato imponendo la consistenza con le equazioni dinamiche, senza prescrivere un PDF euleriana. La consistenza con le equazioni dinamiche sembra un approccio più solido di quello adottato da M.S. Borgas e P.K. Yeung [23] (paragrafo 4.2.3).

Sebbene scritto in partenza in coordinate cartesiane, l'analisi viene svolta nel corso dell'articolo nelle stesse coordinate sferiche adottate sin qui, così si è scelto di introdurre una sua breve trattazione in questo capitolo.

Il coefficiente di drift è assunto essere

$$a_i = -\frac{c}{\tau(r)} \left(u_i + \gamma u_{\parallel} \frac{r_i}{r} \right), \quad (4.80)$$

dove $\tau(r)$ è il tempo scala istantaneo e locale di due particelle a distanza r ed è definito con argomenti dimensionali come

$$\tau(r) = \varepsilon^{-1} \langle u^2 \rangle, \quad u^2 = u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2, \quad (4.81)$$

c e γ sono due parametri adimensionali legati ad s , che è l'esponente della legge di potenza $\langle u^2 \rangle \sim r^s$. In generale $s = 2/3 - \mu(2/3)$, tale cioè da considerare effetti di intermittenza. Le relazioni tra i momenti dedotte dalle equazioni di Navier-Stokes consentono di determinare c e γ in funzione di s . In particolare, in condizioni di isotropia, prescritta a_i come in (4.80), si ha $\gamma = s/2$ e $c = 2(C_0 + 2/3)(3 + s)/(2 + s)$ e nel caso di turbolenza non intermittente sarà $s = 2/3$ e quindi $\gamma = 1/3$ e $c = 11(3C_0 + 2)/12$.

Dalle definizioni di χ_{\parallel} e χ_{\perp} in (4.15) si ottiene la determinazione del modello nella forma

$$\chi_{\parallel} = -\frac{c(\gamma + 1)}{\tau(r)} u_{\parallel} + \frac{u_{\perp}^2}{r}, \quad (4.82)$$

$$\chi_{\perp} = -\left(\frac{c}{\tau(r)} + \frac{u_{\parallel}}{r}\right) u_{\perp} + \frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}}, \quad (4.83)$$

dove è evidente che l'assunzione (4.75) non viene considerata.

Con questi coefficienti di drift l'equazione di Fokker-Planck (4.22) associata al processo è

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_E}{\partial t} + u_{\parallel} \frac{\partial p_E}{\partial r} + \left(\frac{u_{\perp}^2}{r} - \frac{c(\gamma + 1)}{\tau(r)} u_{\parallel}\right) \frac{\partial p_E}{\partial u_{\parallel}} - \left(\frac{c}{\tau(r)} u_{\perp} + \frac{u_{\parallel} u_{\perp}}{r}\right) \frac{\partial p_E}{\partial u_{\perp}} \\ - \frac{c(\gamma + 3)}{\tau(r)} p_E = C_0 \varepsilon \left[\frac{\partial^2 p_E}{\partial u_{\parallel}^2} + \frac{1}{u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \left(u_{\perp} \frac{\partial p_E}{\partial u_{\perp}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.84)$$

L'analisi svolta in [95] si concentra in modo particolare sulla determinazione di equazioni per i coefficienti stocastici che siano coerenti con la dinamica, determinando così una modello più vicino possibile alle caratteristiche statistiche del processo. Inoltre, per la mancata prescrizione di una PDF euleriana, ampio spazio viene dato alle proprietà della PDF soluzione dell'equazione (4.84). Il risultato più interessante, agli scopi dell'attuale studio, è quello relativo alla determinazione delle costante di Richardson. Nel caso non intermittente, fissate la costante universale euleriana di Kolmogorov $C_K = 2$, $c = 28$ da cui segue $C_0 \sim 9.5$ e la differenza di velocità iniziale $\mathbf{u}(t = 0) = 0$, G. Pedrizzetti ed E.A. Novikov [95] ottengono per la costante di Richardson il valore $g = 0.26$. Questo risultato è in accordo, almeno come ordine di grandezza, con le misure sperimentali [55, 93] e numeriche [13].

Tuttavia, mentre $C_K = 2$ è un valore ormai supportato dalle letteratu-
ra [120], $C_0 = 9.5$ risulta abbastanza alto rispetto ai valori comunemente adottati [2]. Infine, la PDF lagrangiana della variabile u_{\parallel} presenta media e skewness positive, diversamente dalla media nulla e skewness negativa presentate dalla PDF euleriana della stessa grandezza, ciò è in accordo con i dati

della simulazione numerica [12] analizzati del capitolo 5. Questo risultato suggerisce un'immagine di dispersione turbolenta nella quale le particelle si muovono assieme per la maggior parte del tempo ed improvvisamente vengono separate con forza quando una finisce in un jet interno al vortice ([95] p. 87).

Nel 1999, G. Pedrizzetti [94] propose una forma perfezionata del termine di drift, ancora ricavata imponendo la consistenza con le equazioni dinamiche, che meglio modella gli effetti dovuti all'intermittenza. In particolare, la forma proposta risulta quadratica, non però nel senso di M.S. Borgas e P.K. Yeung [23], i quali adottano l'assunzione (4.75), ma come prodotto della componente longitudinale con quella trasversale.

4.2.4 Modello cinematico

In questo paragrafo sarà esposta una determinazione, dei modelli Well-Mixed in coordinate sferiche, alternativa a quella proposta da O.A. Kurbanmuradov [65] (paragrafo 4.2.1), perchè, in particolare, essa non è fondata sull'assunzione (4.75). Come già riportato, l'assunzione (4.75) non è verificata per i flussi turbolenti sia teoricamente [84, 38], che dall'analisi dei dati ottenuti dalla simulazione numerica [12] riportata nel capitolo 5.

Avendo in mente, come obiettivo, di risolvere l'indeterminazione dei modelli stocastici multidimensionali, è chiaro che questo sarà raggiunto eliminando la sottodeterminazione del problema. Tale sottodeterminazione è data dal fatto che, sebbene sia assunta come nota la PDF euleriana p_E , si ha un'unica equazione, (4.21) o (4.22), per due funzioni incognite χ_{\parallel} , χ_{\perp} (4.23-4.24). Quindi, affinché sia risolta questa indeterminazione, occorre introdurre una nuova equazione indipendente. L'assunzione di una PDF euleriana nota è in parte giustificata dalla scelta di adottare lo schema autosimilare indicato dalla teoria di Kolmogorov K41.

E' noto che i modelli stocastici non unidimensionali non sono determinati in modo univoco nel caso generale, sebbene sia prescritta una PDF euleriana, perchè la Well-Mixed Condition (3.83) non impone caratteristiche dinamiche ma statistiche e la densità di probabilità delle velocità del flusso non contiene tutta l'informazione dinamica necessaria per risolvere il problema [72, 132, 113, 21]. Tuttavia, nel caso unidimensionale questa indeterminazione non sorge. Potrebbe essere posta, a questo punto, la domanda circa la presenza o meno di una dinamica nel caso unidimensionale e, se dinamica esiste, se la PDF euleriana, in quel caso, ne contenga l'informazione. Tale questione non sembra affrontata in letteratura, forse perchè la turbolenza è un processo di natura tridimensionale poiché fondato sull'equazione di continuità (1.3-1.4), quindi l'unidimensionalità spaziale non può essere considerata.

In altre parole, l'esistenza di un modello univocamente determinato senza assunzioni aggiunte, data la PDF delle velocità, significa che la dinamica del processo è contenuta nella PDF oppure che il sistema di riferimento adottato

rende, di fatto, unidimensionale il processo il quale, se la PDF non contiene informazioni dinamiche, è puramente cinematico.

Matematicamente si osserva che, nel caso in cui sia assunta come nota la PDF euleriana, i modelli unidimensionali spazialmente non presentano indeterminazioni perchè la Fokker-Planck associata è sufficiente a determinare l'unica funzione incognita del problema. Nei casi multidimensionali, invece, ciò non avviene, perchè l'equazione di Fokker-Planck, per la natura multidimensionale della variabile aleatoria, è un'equazione i cui operatori differenziali agiscono come divergenze, ne segue che l'equazione di Fokker-Planck è ancora una sola mentre le funzioni incognite sono tante quante le dimensioni del problema.

Tuttavia, nel costruire un modello stocastico, o una teoria statistica, occorre sapere, in generale ed in linea di principio, se la PDF del campo di velocità contenga tutta l'informazione dinamica del flusso oppure no. Nel caso in cui la dinamica sia retta dalle equazioni di Navier-Stokes, come dimostrato da T.S. Lundgren nel 1967 [72], non è possibile determinare in modo univoco il problema conoscendo solo la PDF euleriana, perchè i gradi di libertà sono infiniti. Questo significa che, nel caso unidimensionale, il processo può essere considerato puramente cinematico.

Il particolare sistema di riferimento adottato rende il problema unidimensionale poiché considera solo il modulo della separazione tra le particelle. In questo caso, quindi, ha senso cercare una determinazione solo cinematica del modello.

Il sistema di riferimento è espresso in coordinate sferiche e segue il vettore separazione delle particelle. Esso sarà rotante con velocità angolare variabile nel tempo e dipendente dalla separazione e dalla velocità relativa tra le particelle. In un tale sistema gli effetti osservati sono solo quelli prodotti lungo la congiungente le particelle. Si ha cioè che il moto, nel sistema solidale con le particelle, è dato dalla variazione nel tempo della sola componente longitudinale della differenza di velocità. In generale, adottando la stessa notazione della (4.42), la variazione nel tempo del vettore \mathbf{u} nel sistema in moto risulta essere

$$\frac{d_r \mathbf{u}}{dt} = \frac{d_a u_{\parallel}}{dt} \frac{\mathbf{r}}{r} + \frac{d_a u_{\perp}}{dt} \hat{n}, \quad (4.85)$$

cioè la somma delle componenti dell'accelerazione proiettate nei nuovi assi, dove \hat{n} è il versore ortogonale a \mathbf{r} su cui vive la componente u_{\perp} . Per quanto detto sopra risulterà

$$\frac{d_a u_{\perp}}{dt} \hat{n} = \left(\frac{u_i a_i - u_{\parallel} a_{\parallel}}{u_{\perp}} - \frac{u_{\parallel} u_{\perp}}{r} \right) \hat{n} = 0, \quad (4.86)$$

da cui

$$\frac{u_i a_i - u_{\parallel} a_{\parallel}}{u_{\perp}} = \frac{u_{\parallel} u_{\perp}}{r}. \quad (4.87)$$

Ora, ricordando che

$$\frac{d_a u_{\parallel}}{dt} = a_{\parallel} + \frac{u_{\perp}^2}{r}, \quad (4.88)$$

dalla (4.42) si ottiene

$$\mathbf{a} = \frac{d_a \mathbf{u}}{dt} = \left(a_{\parallel} + \frac{u_{\perp}^2}{r} \right) \frac{\mathbf{r}}{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}. \quad (4.89)$$

La relazione cinematica (4.89) costituisce la determinazione proposta in alternativa al modello di O.A. Kurbanmuradov [65] (paragrafo 4.2.1).

Tornando alla modellizzazione stocastica, dalla (4.89) si ha

$$a_i = \left(a_{\parallel} + \frac{u_{\perp}^2}{r} \right) \frac{r_i}{r} - \frac{u^2}{r} \frac{r_i}{r} + \frac{u_{\parallel}}{r} u_i, \quad (4.90)$$

e quindi, ricordando la definizione di χ_{\perp} (4.15), si ottiene

$$\chi_{\perp} = \frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}}. \quad (4.91)$$

Inserendo la (4.91) nella (4.22) si giunge all'equazione di evoluzione

$$\frac{\partial p_E}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_{\parallel} p_E) + \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} (\chi_{\parallel} p_E) = C_0 \varepsilon \left[\frac{\partial^2 p_E}{\partial u_{\parallel}^2} + \frac{1}{u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \left(u_{\perp} \frac{\partial p_E}{\partial u_{\perp}} \right) \right], \quad (4.92)$$

che integrata in u_{\parallel} nell'intervallo $]-\infty; u_{\parallel}]$ consente di determinare il termine di drift longitudinale χ_{\parallel} in modo univoco come segue

$$\chi_{\parallel} = C_0 \varepsilon \frac{1}{p_E} \frac{\partial p_E}{\partial u_{\parallel}} - \frac{1}{p_E} F(u_{\parallel}, u_{\perp}, r, t), \quad (4.93)$$

dove

$$F = \int_{-\infty}^{u_{\parallel}} \left\{ \frac{\partial p_E}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u'_{\parallel} p_E) - \frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \left(u_{\perp} \frac{\partial p_E}{\partial u_{\perp}} \right) \right\} du'_{\parallel}, \quad (4.94)$$

fatte le generali assunzioni

$$\chi_{\parallel} p_E \rightarrow 0, \quad \frac{\partial p_E}{\partial u_{\parallel}} \rightarrow 0, \quad |u_{\parallel}| \rightarrow \infty. \quad (4.95)$$

Dalla (4.93) è evidente la dipendenza di χ_{\parallel} da u_{\perp} contrariamente da quanto invece imposto attraverso l'assunzione (4.75) nel modello di O.A. Kurbanmuradov [65] (paragrafo 4.2.1).

Questa differenza produce una consistente diversità tra i due modelli. Nel caso stazionario, il modello di Kurbanmuradov ammette come PDF

euleriana anche una densità fattorizzabile, ad esempio la gaussiana, mentre così non è per il modello determinato cinematicamente (4.93). Infatti, integrando la (4.92) in u_{\parallel} con peso 2π si ottiene

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \langle u_{\parallel} | u_{\perp} \rangle p_{\perp}) = \frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \left(u_{\perp} \frac{\partial p_{\perp}}{\partial u_{\perp}} \right), \quad (4.96)$$

dove p_{\perp} è la PDF marginale di u_{\perp} ($p_{\perp} = p_E(u_{\perp})$) e

$$\langle u_{\parallel} | u_{\perp} \rangle = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} u_{\parallel} p_E(u_{\parallel} | u_{\perp}) du_{\parallel}.$$

Nell'ipotesi che la PDF euleriana sia fattorizzabile si ha $\langle u_{\parallel} | u_{\perp} \rangle = \langle u_{\parallel} \rangle = 0$ e quindi dalla (4.96)

$$\frac{\partial^2 p_{\perp}}{\partial u_{\perp}^2} + \frac{1}{u_{\perp}} \frac{\partial p_{\perp}}{\partial u_{\perp}} = 0. \quad (4.97)$$

Tuttavia, si dimostra (Appendice) che la (4.97) non ammette soluzione, questo prova il fatto che nel modello cinematico l'uso di una PDF euleriana fattorizzabile non è consentito.

La non fattorizzabilità della PDF euleriana e quindi la non indipendenza delle statistiche di u_{\parallel} da u_{\perp} è un risultato esatto delle equazioni di Navier-Stokes [84, 38]. Quest'ultimo aspetto rende il modello cinematico proposto preferibile a quello di O.A. Kurbanmuradov [65].

4.2.5 Confronto tra il modello cinematico e quello di Kurbanmuradov: risultati analitici

E' noto [65, 66] che il modello proposto da O.A. Kurbanmuradov [65] (paragrafo 4.2.1), fondato sull'assunzione (4.75), predice valori della costante di Richardson g maggiori di quelli misurati sperimentalmente [55, 93], numericamente [13] o con altri modelli stocastici di tipo Well-Mixed [133, 21].

Una quantità significativa per un confronto delle proprietà dispersive dei due modelli è la media d'insieme dei drift longitudinali. Infatti, un alto valore della separazione quadratica media è determinato anche da un elevato valore della media d'insieme del coefficiente di drift. Questo confronto evidenzia le conseguenze dovute all'assunzione (4.75).

Dalle formule (4.93-4.94) e (4.77) si hanno i due termini di drift longitudinali del modello cinematico e di O.A. Kurbanmuradov, qui rinominati rispettivamente χ_{\parallel}^C e χ_{\parallel}^K . Per la prerogativa propria del modello di O.A. Kurbanmuradov, una media d'insieme che renda coerente il confronto tra i due modelli è quella per u_{\perp} fissata, cosicché u_{\parallel} risulti essere l'unica variabile aleatoria per entrambi i modelli.

Le medie d'insieme dei due coefficienti saranno definite dagli integrali dei prodotti $\chi_{\parallel}^C p_E(u_{\parallel} | u_{\perp})$ e $\chi_{\parallel}^K p_{\parallel}$. Segue da questa argomentazione che, nel

caso stazionario, le quantità da studiare sono

$$\begin{aligned} \chi_{\parallel}^C p_E(u_{\parallel}|u_{\perp}) &= C_0 \varepsilon \frac{\partial p_E(u_{\parallel}|u_{\perp})}{\partial u_{\parallel}} - \int_{-\infty}^{u_{\parallel}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u'_{\parallel} p_E(u'_{\parallel}|u_{\perp})) du'_{\parallel} \\ &+ \frac{1}{p_{\perp}} \int_{-\infty}^{u_{\parallel}} p_{\parallel} \frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \left(u_{\perp} \frac{\partial p_E(u_{\perp}|u'_{\parallel})}{\partial u_{\perp}} \right) du'_{\parallel}, \quad (4.98) \end{aligned}$$

$$\chi_{\parallel}^K p_{\parallel} = C_0 \varepsilon \frac{p_{\parallel}}{\partial u_{\parallel}} - \int_{-\infty}^{u_{\parallel}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u'_{\parallel} p_{\parallel}) du'_{\parallel}, \quad (4.99)$$

così come le si ottiene direttamente dalle (4.93-4.94) e (4.77), noto che $p_E(u_{\parallel}, u_{\perp}) = p_E(u_{\parallel}|u_{\perp}) p_{\perp} = p_{\parallel} p_E(u_{\perp}|u_{\parallel})$.

La PDF euleriana p_E è prescritta esternamente al problema in entrambi i casi e non è possibile quindi studiarne nè le proprietà generali nè quelle specifiche dei singoli modelli: la PDF congiunta $p_E(u_{\parallel}, u_{\perp})$ nel modello cinematico, la PDF marginale $p_E(u_{\parallel}) = p_{\parallel}$ in quello di O.A. Kurbanmuradov. Tuttavia, si può ritenere che $p_E(u_{\parallel}|u_{\perp})$ e p_{\parallel} abbiano la stessa dipendenza funzionale da u_{\parallel} poiché $p_{\parallel} = \int_0^{\infty} p_E(u_{\parallel}|u_{\perp}) du_{\perp}$ e pertanto concludere che la differenza principale tra (4.98) e (4.99) è data dal termine in (4.98)

$$\frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}} \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \left(u_{\perp} \frac{\partial p_E(u_{\perp}|u_{\parallel})}{\partial u_{\perp}} \right) = \frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}} \left(\frac{\partial p_E(u_{\perp}|u_{\parallel})}{\partial u_{\perp}} + u_{\perp} \frac{\partial^2 p_E(u_{\perp}|u_{\parallel})}{\partial u_{\perp}^2} \right). \quad (4.100)$$

La forma funzionale di $p_E(u_{\perp}|u_{\parallel})$ non è nota. In generale, la media e la moda di una PDF non coincidono, eccetto il caso in cui essa sia simmetrica ed unimodale. Sebbene $p_E(u_{\perp}|u_{\parallel})$ sia unilatera e quindi pesantemente non simmetrica, nell'ipotesi in cui la coda della PDF per $u_{\perp} \rightarrow \infty$ non sia troppo influente (o analogamente la varianza è sufficientemente piccola), si può supporre di approssimare tra loro media e moda. Infatti, in questo caso, la PDF può essere vista come una densità di probabilità simmetrica rispetto all'origine e traslata di una quantità pari al valor medio. In questo caso allora, il valore più probabile dell'espressione in (4.100) è

$$C_0 \varepsilon \frac{\partial^2 p_E(u_{\perp}|u_{\parallel})}{\partial u_{\perp}^2} < 0, \quad (4.101)$$

essendo la derivata prima nulla nel punto di massimo e la derivata seconda negativa. Segue, allora, che per la maggior parte delle coppie di particelle il termine in (4.100) è negativo (4.101) e che quindi

$$\chi_{\parallel}^C p_E(u_{\parallel}|u_{\perp}) < \chi_{\parallel}^K p_{\parallel}. \quad (4.102)$$

Da questa breve analisi si può concludere che la dispersione prodotta dal modello cinematico risulta minore di quella del modello di O.A. Kurbanmuradov.

Per concludere, il modello cinematico converge a quello Q1D di O.A. Kurbanmuradov quando la variazione di p_E rispetto a u_\perp diventa trascurabile e quindi l'espressione in (4.100) è circa zero. In questo caso allora, poiché la PDF congiunta di u_\parallel e u_\perp non può fattorizzare (4.97), anziché aver raggiunto l'indipendenza statistica tra le due variabili sarà stato raggiunto il limite per cui u_\perp risulta uniformemente distribuita e quindi $p(u_\parallel|u_\perp) \simeq p_\parallel$. Questo limite si otterrà per tempi lunghi.

4.3 Limite per piccole lunghezze di scala e PDF euleriana

Un'importante verifica per ogni modello di dispersione, assoluta o relativa, è il limite per piccoli tempi di scala [132]. Infatti, in questo limite, ogni modello deve ridursi ad un processo diffusivo. Nel caso specifico della dispersione relativa è altrettanto importante l'analogo limite per piccole lunghezze di scala. Questo limite fornisce noti risultati nel sistema di riferimento cartesiano, mentre nel sistema di riferimento sferico non inerziale adottato (4.10-4.11), l'analisi dello stesso limite risulta non essere affatto banale e condurre a risultati inaspettati.

Per completezza, ma soprattutto per semplificare la lettura, saranno riproposte in questo paragrafo in forma esplicita equazioni già introdotte e discusse.

In coordinate cartesiane, la formula integrale di Thomson-Novikov (2.17) trasforma l'equazione di Fokker-Planck che governa l'evoluzione della PDF lagrangiana nella formula

$$\frac{\partial p_E}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r_i}(u_i p_E) - \frac{\partial}{\partial u_i}(a_i p_E) + C_0 \varepsilon \frac{\partial^2 p_E}{\partial u_i \partial u_i}, \quad (4.103)$$

dalla quale si è ottenuta la *Well-Mixed Condition* (3.83).

Nel limite per piccole lunghezze di scala, $\lambda \rightarrow 0$, la (4.103) diventa

$$\frac{\partial p_E}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial u_i}(a_i p_E) + C_0 \varepsilon \frac{\partial^2 p_E}{\partial u_i \partial u_i}, \quad (4.104)$$

e quindi in particolare

$$\frac{\partial}{\partial r_i}(u_i p_E) = 0, \quad (4.105)$$

dove si evidenzia l'indipendenza della PDF e dei suoi momenti dalla separazione.

Applicando le regole di trasformazione di variabili per una equazione di tipo Fokker-Planck (4.3-4.4), come già riportato in (4.21), la (4.103) e la (4.104) diventano rispettivamente

$$\frac{\partial p'_E}{\partial t} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(u_\parallel r^2 p'_E) - \frac{\partial}{\partial u_\parallel} \left[\left(a_\parallel + \frac{u_\perp^2}{r} \right) p'_E \right]$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \left[\left(\frac{a_i u_i - a_{\parallel} u_{\parallel}}{u_{\perp}} - \frac{u_{\parallel} u_{\perp}}{r} + \frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}} \right) p'_E \right] \\
& + C_0 \varepsilon \left[\frac{\partial^2 p'_E}{\partial u_{\parallel}^2} + \frac{\partial^2 p'_E}{\partial u_{\perp}^2} \right], \tag{4.106}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p'_E}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} (a_{\parallel} p'_E) - \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \left[\left(\frac{a_i u_i - a_{\parallel} u_{\parallel}}{u_{\perp}} + \frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}} \right) p'_E \right] \\
& + C_0 \varepsilon \left[\frac{\partial^2 p'_E}{\partial u_{\parallel}^2} + \frac{\partial^2 p'_E}{\partial u_{\perp}^2} \right], \tag{4.107}
\end{aligned}$$

e le equazioni (4.106) e (4.107) coincidono se è soddisfatta l'equazione

$$- \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (u_{\parallel} r^2 p'_E) - \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} \left(\frac{u_{\perp}^2}{r} p'_E \right) - \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \left(- \frac{u_{\parallel} u_{\perp}}{r} p'_E \right) = 0, \tag{4.108}$$

che corrisponde al limite espresso dalla (4.105) nel nuovo sistema di riferimento. Applicando l'identità $p'_E = u_{\perp} p_E$ la (4.108) diventa

$$u_{\parallel} \frac{\partial p_E}{\partial r} + \frac{u_{\perp}^2}{r} \frac{\partial p_E}{\partial u_{\parallel}} - \frac{u_{\parallel} u_{\perp}}{r} \frac{\partial p_E}{\partial u_{\perp}} = 0. \tag{4.109}$$

Nel caso del modello cinematico (paragrafo 4.2.4), l'equazione di Fokker-Planck lagrangiana risulta trasformata in

$$\begin{aligned}
\frac{\partial p'_E}{\partial t} = & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (u_{\parallel} r^2 p'_E) - \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} \left[\left(a_{\parallel} + \frac{u_{\perp}^2}{r} \right) p'_E \right] \\
& - \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \left(\frac{C_0 \varepsilon}{u_{\perp}} p'_E \right) + C_0 \varepsilon \left[\frac{\partial^2 p'_E}{\partial u_{\parallel}^2} + \frac{\partial^2 p'_E}{\partial u_{\perp}^2} \right], \tag{4.110}
\end{aligned}$$

e affinché la (4.110) abbia il corretto limite (4.108) nel caso $\lambda \rightarrow 0$ occorre che sia verificata

$$- \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (u_{\parallel} r^2 p'_E) - \frac{\partial}{\partial u_{\parallel}} \left(\frac{u_{\perp}^2}{r} p'_E \right) + \frac{\partial}{\partial u_{\perp}} \left(\frac{a_i u_i - a_{\parallel} u_{\parallel}}{u_{\perp}} p'_E \right) = 0. \tag{4.111}$$

Poiché dalla determinazione adottata (4.89) si ha l'identità (4.87) per tutti i valori di r , allora la (4.111) prende la stessa forma della (4.108) e conseguentemente anche della (4.109). Questo ultimo risultato prova che il modello cinematico (paragrafo 4.2.4) soddisfa in modo corretto il limite per piccole lunghezze di scala, $\lambda \rightarrow 0$.

Per quanto riguarda l'approccio Q1D di O.A. Kurbanmuradov [65], nel caso stazionario dalla (4.104) si ha $a_i p_E = C_0 \varepsilon \partial p_E / \partial u_i$ che, in coordinate

sferiche, diventa $a_{\parallel} p_E = C_0 \varepsilon \partial p_E / \partial u_{\parallel}$ ed, in combinazione con l'assunzione (4.75), consente di ottenere l'identità

$$\frac{\partial p_E}{\partial u_{\parallel}} = \frac{p_E}{C_0 \varepsilon} \left[\chi_{\parallel}(u_{\parallel}, r) - \frac{u_{\perp}^2}{r} \right]. \quad (4.112)$$

La formula (4.112) non ammette però come soluzione una PDF. Infatti, si consideri, ad esempio, il punto di massimo $u_{\parallel} = u_{max}$, allora sarà $\partial p_E / \partial u_{\parallel} = 0$ e, conseguentemente, deve valere $\chi_{\parallel}(u_{max}, r) - u_{\perp}^2 / r = 0$, poichè, se p_E è una PDF questa non può annullarsi nel suo punto di massimo ($p_E \geq 0$). Tuttavia, poichè u_{\perp} è ancora una variabile, l'uguaglianza $\chi_{\parallel}(u_{max}, r) - u_{\perp}^2 / r = 0$ non è vera in generale e ne segue che i modelli Q1D non soddisfano il limite per piccole lunghezze di scala. Anche in questo caso, oltre alla non fattorizzabilità della PDF euleriana, il modello cinematico risulta migliore di quelli Q1D per la modellizzazione dei processi di dispersione turbolenta.

La stessa equazione (4.109) è stata ottenuta da E.A. Novikov [88] analizzando nello stesso identico limite l'equazione di continuità per la PDF euleriana. E.A. Novikov analizza i casi in cui ci sia un forte shear od un jet e le particelle si trovino una dentro e l'altra fuori dal jet. In questi casi, il termine inerziale legato all'incomprimibilità risulta dominante e la condizione principale da analizzare è la (4.105), di cui la (4.109) è l'analogo nello specifico sistema di coordinate sferiche non inerziale adottato anche da E.A. Novikov [88]. Come evidenziato da E.A. Novikov [88], la PDF che soddisfa la (4.109) ha una forma inaspettata ed ancora non analizzata in letteratura. La PDF euleriana p_E , nel nuovo sistema di riferimento, sarà una funzione delle tre variabili indipendenti u_{\parallel} , u_{\perp} e r anche nel limite $\lambda \rightarrow 0$ essendo r una variabile che definisce il sistema stesso. Dalla (4.105) si osserva però che il vettore \mathbf{u} è ortogonale al vettore $\nabla_r p_E$ e pertanto che p_E dipende da \mathbf{r} solo in termini delle componenti ortogonali a \mathbf{u} . Queste considerazioni portano a determinare p_E come funzione di $u = (u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2)^{1/2}$ e $u_{\perp} r$ e quindi del tipo:

$$p_E(u_{\parallel}, u_{\perp}; r) = F(u, u_{\perp} r). \quad (4.113)$$

Considerando che

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_E}{\partial r} &= \frac{\partial F}{\partial r} = u_{\perp} \frac{\partial F}{\partial (u_{\perp} r)}, \\ \frac{\partial p_E}{\partial u_{\parallel}} &= \frac{\partial F}{\partial u_{\parallel}} = \frac{u_{\parallel}}{u} \frac{\partial F}{\partial u}, \\ \frac{\partial p_E}{\partial u_{\perp}} &= \frac{\partial F}{\partial u_{\perp}} = \frac{u_{\perp}}{u} \frac{\partial F}{\partial u} + r \frac{\partial F}{\partial (u_{\perp} r)}, \end{aligned}$$

e sostituendo questi risultati nella (4.109), si prova che quella espressa in (4.113) è la forma generale della soluzione della (4.105) e quindi della (4.109).

A questo punto, ricordando che prerogativa della dinamica dettata dalle equazioni di Navier-Stokes è l'esistenza di un unico parametro dimensionale ε , attraverso il classico scaling dimensionale di Kolmogorov $u \sim (\varepsilon r)^{1/3}$ la (4.113) diventa

$$p_E(u_{\parallel}, u_{\perp}; r) = F(u, u_{\perp} r) = (\varepsilon r u_{\perp})^{-3/4} f \left[\frac{u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2}{(\varepsilon r u_{\perp})^{1/2}} \right]. \quad (4.114)$$

La forma dell'argomento di questa PDF è del tutto nuova ed essa è difficilmente riconducibile ad una gaussiana. La forte non gaussianità della PDF del campo di velocità euleriano è, nell'intervallo inerziale, un noto risultato esatto derivato dalle equazioni di Navier-Stokes, come è evidente dallo studio appena svolto, questa caratteristica si conserva anche nel limite $\lambda \rightarrow 0$.

Poiché p_E è una funzione pari di u_{\parallel} (4.114), allora, nel limite di validità della formula (4.109), si ha che tutti i momenti dispari di u_{\parallel} sono nulli.

In particolare la PDF in (4.114) può assumere la forma del tipo

$$p_E(u_{\parallel}, u_{\perp}; r) = N_0 (\varepsilon r u_{\perp})^{-3/4} \exp \left\{ -\theta_0 \frac{(u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2)^{\gamma}}{(\varepsilon r u_{\perp})^{\gamma/2}} \right\}, \quad (4.115)$$

in cui è marcata la non fattorizzabilità e N_0 e θ_0 sono costanti.

Lo studio condotto da E.A. Novikov [88] approfondisce inoltre gli effetti legati all'intermittenza, poiché l'equazione limite (4.105) è attesa essere valida anche in presenza di intermittenza. Questi effetti potrebbero essere introdotti attraverso leggi di potenza in r per N_0 e θ_0 . Tuttavia, la dipendenza di N_0 e θ_0 da r non garantirebbe che la (4.115) sia ancora soluzione della (4.109). Così, affinché venga mantenuto lo stesso argomento nella PDF, poiché esso è l'argomento della soluzione della (4.109), E.A. Novikov introduce un parametro $\alpha = \varepsilon L^h$, dove L è una lunghezza di scala euleriana, tale per cui la PDF (4.115) diventa

$$p_E(u_{\parallel}, u_{\perp}; r) = N_h w^{-3} \exp \left\{ -\theta_h \frac{(u_{\parallel}^2 + u_{\perp}^2)^{\gamma}}{w^{2\gamma}} \right\}, \quad (4.116)$$

dove $w = [(u_{\perp} r)^{1-h} \alpha]^{1/(4-h)}$. E' evidente che per $h = 0$ le due PDF (4.115) e (4.116) coincidono. In entrambi i casi, qualora siano posti $\gamma = 2/3$ nel caso della (4.115) e $\gamma = 2/3 - h/6$ nel caso della (4.116), la PDF di u_{\parallel} ha un comportamento asintotico di tipo esponenziale come osservato sperimentalmente [3].

Nella presente trattazione però, gli effetti dovuti all'intermittenza sono trascurati e pertanto, senza approfondire oltre il discorso, ci si limiterà a constatare che la non fattorizzabilità della PDF del campo di velocità euleriano per tutte le scale di separazione come richiesto dal modello cinematico proposto, risulta essere coerente con le caratteristiche principali delle PDF ricavate da E.A. Novikov (4.114-4.115-4.116).

Capitolo 5

Misure di quantità lagrangiane di simulazioni numeriche dirette

Un importante strumento per la conoscenza delle caratteristiche della dinamica dei fluidi sono le Simulazioni Numeriche Dirette (DNS) delle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes (1.1). Le misure ottenute dall'analisi dei dati di dette simulazioni possono essere considerate come misure sperimentali con le quali confrontare teorie e modelli (capitolo 1).

Per completare il lavoro svolto, sono stati analizzati i dati della simulazione numerica diretta (DNS), descritta in [12], con particolare attenzione alle quantità utili alla determinazione di proprietà rilevanti per la discriminazione tra i modelli stocastici descritti nel capitolo 4. Così, oltre alle caratteristiche generali, sono state stimate le statistiche di alcune quantità definite nel particolare sistema di riferimento qui adottato.

5.1 Caratteristiche generali

Qui di seguito saranno analizzati i dati ottenuti dalla simulazione delle soluzioni delle equazioni di Navier-Stokes eseguita da L. Biferale *et al.* nel 2004 [12]. Le equazioni di Navier-Stokes (1.1) sono state integrate numericamente in un volume cubico periodico nelle tre componenti cartesiane, attraverso un codice pseudospettrale. Il rapporto tra la scala dissipativa di Kolmogorov τ_η ed il tempo necessario affinché il vortice compia un giro completo (eddy turnover time) T_E (in [12] indicato con T_L), definisce il numero di Reynolds di microscala R_λ (capitolo 1)

$$R_\lambda \sim \frac{T_E}{\tau_\eta}, \quad (5.1)$$

La simulazione è stata condotta sia nel caso in cui $R_\lambda = 183$ che nel caso in cui $R_\lambda = 283$: nel presente lavoro sono stati analizzati i dati del secondo caso. I parametri della simulazione numerica sono riportati nella tabella 5.1.

R_λ	u_{rms}	ε	ν	η	L
284	1.7	0.81	0.00088	0.005	3.14
T_E	τ_η	T	δx	N^3	N_p
1.8	0.033	4.4	0.006	1024^3	$1.92 \cdot 10^6$

Tabella 5.1: Parametri della simulazione numerica: numero di Reynolds di microscala R_λ , velocità quadratica media u_{rms}^2 , energia media dissipata ε , viscosità ν , scala di Kolmogorov $\eta = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$, scala integrale L , eddy turnover time $T_E = L/u_{rms}$, tempo di Kolmogorov $\tau_\eta = (\nu/\varepsilon)^{1/2}$, tempo totale della simulazione T , passo spaziale della griglia δx , risoluzione N^3 , numero di particelle N_p .

In ogni istante, il codice calcola la posizione di ogni singola particella attraverso l'equazione cinematica

$$\frac{d\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0)}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0), t), \quad (5.2)$$

noto che l'accelerazione in ogni istante di una particella di fluido corrisponde all'insieme delle forze che agiscono in quel punto ed in quell'istante. Il comportamento delle forze agenti su una particella di fluido è dato dalle equazioni di Navier-Stokes (1.1) e quindi la formula

$$\frac{d^2\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0)}{dt^2} = -\frac{1}{\rho}\nabla p(\mathbf{X}, t) + \nu\nabla^2\mathbf{u}(\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0), t) + \mathbf{F}(\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0), t). \quad (5.3)$$

Si noti che la parte destra in (5.3) corrisponde alle equazioni di Navier-Stokes (1.1) dove $\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0)$ è la posizione al tempo t della particella, posto che questa si trovasse in \mathbf{x}_0 al tempo $t = 0$ ($\mathbf{X}(0; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$), ρ la densità costante del fluido, ∇p il gradiente di pressione, $\nu\nabla^2\mathbf{u}$ la forza viscosa ed \mathbf{F} una forzante esterna casuale.

Nel caso di elevati valori del numero di Reynolds, il contributo maggiore alla accelerazione è dato dal gradiente di pressione [9], mentre quello dovuto alla forzante esterna casuale è quasi trascurabile [12], come mostrato anche dai grafici delle Figure 5.1, 5.2, 5.3.

Le particelle partono posizionate sui vertici di 96000 tetraedri di 5 tipi diversi i cui baricentri sono distribuiti in maniera uniforme nel volume iniziale L^3 . Il numero totale di particelle risulta dunque $N_p = 96000 \cdot 5 \cdot 4 = 1.92 \cdot 10^6$. L'unità di misura spaziale è data dalla proporzione $1024 : 2\pi = 1 : \delta x$, da cui segue che il passo di griglia δx vale $\delta x = 2\pi/1024 = 0.006$. I 5 tipi diversi di tetraedri sono caratterizzati da diverse distanze tra i vertici, le distanze

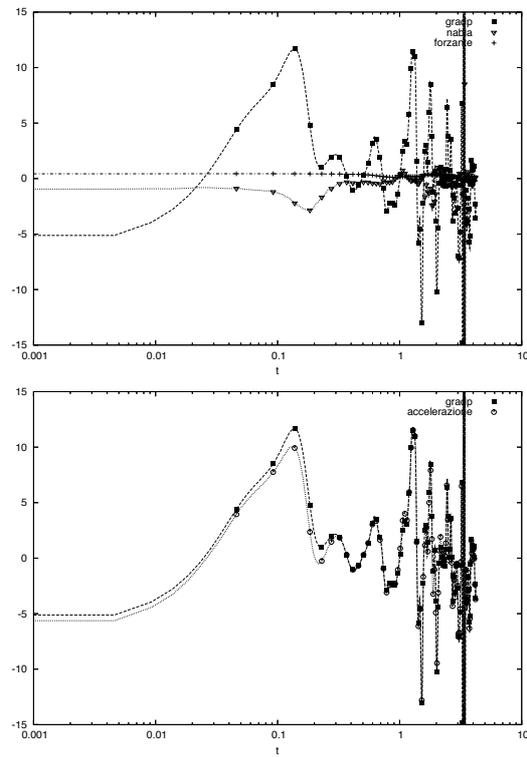


Figura 5.1: Confronto tra i tre contributi di accelerazione $\nabla_x p$, $\nu \nabla^2 u_x$, F_x per la componente x di una traiettoria (sopra). Confronto tra il contributo parziale di $\nabla_x p$ e quello totale (sotto).

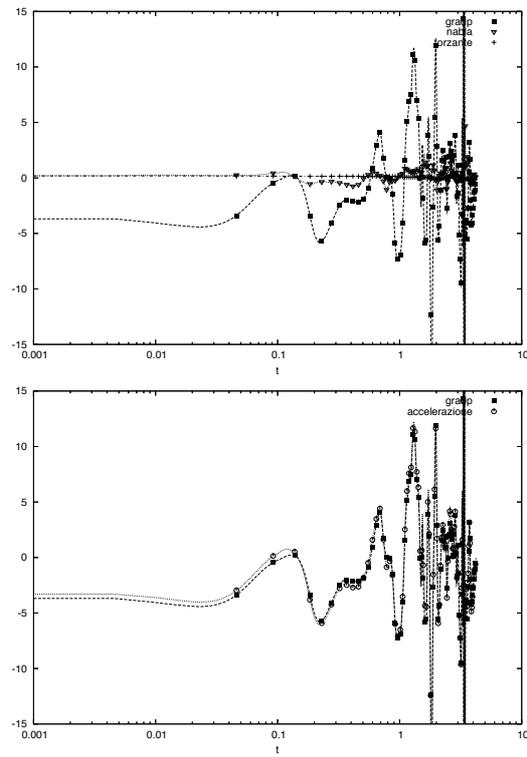


Figura 5.2: Confronto tra i tre contributi di accelerazione $\nabla_y p$, $\nu \nabla^2 u_y$, F_y per la componente y di una traiettoria (sopra). Confronto tra il contributo parziale di $\nabla_y p$ e quello totale (sotto).

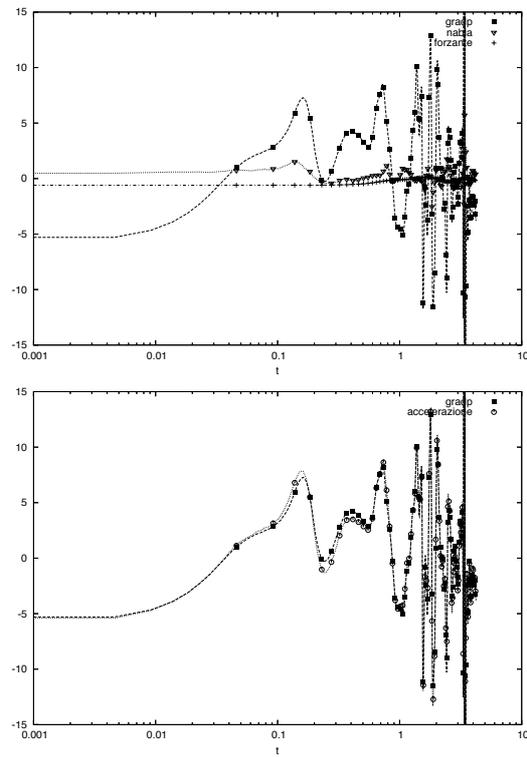


Figura 5.3: Confronto tra i tre contributi di accelerazione $\nabla_z p$, $\nu \nabla^2 u_z$, F_z per la componente z di una traiettoria (sopra). Confronto tra il contributo parziale di $\nabla_z p$ e quello totale (sotto).

iniziali sono 3: $r_{01} = 0.006$, $r_{02} = 0.009$, $r_{03} = 0.012$. Nel primo tipo di tetraedro le separazioni tra i vertici sono tutte r_{01} , nel secondo tipo sono r_{01} e r_{02} , nel terzo tipo r_{01} , r_{02} e r_{03} , nel quarto tipo r_{02} e r_{03} , nel quinto tipo tutte r_{03} . Le statistiche lagrangiane delle quantità relative sono state dunque misurate considerando coppie con la stessa separazione iniziale, anche se questo significa provenienza da tetraedri di tipo differente.

All'istante iniziale le statistiche possono considerarsi, per l'uniformità della distribuzione delle particelle, statistiche euleriane stimate alle 3 separazioni iniziali con cui sono classificabili le coppie di particelle.

5.1.1 Scala temporale e scala spaziale.

Dalle statistiche ad una particella si deducono alcune delle caratteristiche di base del flusso. Dai grafici di Fig. 5.4 si osserva che la velocità media delle particelle è nulla, mentre dal grafico di Fig. 5.5 si evidenzia che la simulazione non è né isotropa né stazionaria: da questo secondo grafico si possono stimare le varianze delle tre componenti cartesiane: $\sigma_x^2 = \langle v_x^2 \rangle = 2.55$; $\sigma_y^2 = \langle v_y^2 \rangle = 1.4$; $\sigma_z^2 = \langle v_z^2 \rangle = 1.9$. Da questi valori si osserva che l'energia lungo la componente x è sensibilmente maggiore di quella nelle altre direzioni. La non isotropia e la non stazionarietà della simulazione è data da questioni numeriche, come verificato in altre simulazioni [149]. Sebbene non riproducano perfettamente le condizioni volute, esse costituiscono uno dei migliori strumenti di indagine sperimentale oggi disponibili (capitolo 1). L'uso di questi dati per studiare la turbolenza in condizioni isotrope e stazionarie è quindi giustificato dal fatto che esse rappresentano la migliore approssimazione accessibile e le loro imperfezioni i limiti sperimentali dentro i quali estrapolare le informazioni.

Un'importante informazione di tipo lagrangiano è la funzione di struttura (capitolo 2 (2.8)). In Fig. 5.6 si osserva che esiste un intervallo temporale isotropo, esclusa la durata degli effetti viscosi, nel quale l'andamento della funzione di struttura è lineare nel tempo nella forma $C_0 \varepsilon t$ dove t è il tempo trascorso (come predetto dall'analisi dimensionale). Il coefficiente $C_0 \varepsilon$ è stato stimato uguale a 4.05, poichè $\varepsilon = 0.81$, come riportato in tabella 5.1, allora $C_0 = 5$, una stima largamente usata in letteratura [2]. Inoltre si osserva, che dopo un lungo tempo dall'inizio della simulazione, la funzione di struttura, di ciascuna componente cartesiana, converge a $2\sigma_i^2$ con il valore con cui era stata stimata ogni σ_i nel grafico di Fig. 5.5.

Con le informazioni sin qui ricavate, come nel capitolo 3 e [79], per mezzo dell'identità

$$\langle (v_i(t) - v_i(0))^2 \rangle = C_0 \varepsilon t = 2\sigma_i^2 \frac{t}{\tau_i}, \quad (5.4)$$

si ottiene la formula di H. Tennekes [130]

$$\tau_i = \frac{2\sigma_i^2}{C_0 \varepsilon}, \quad (5.5)$$

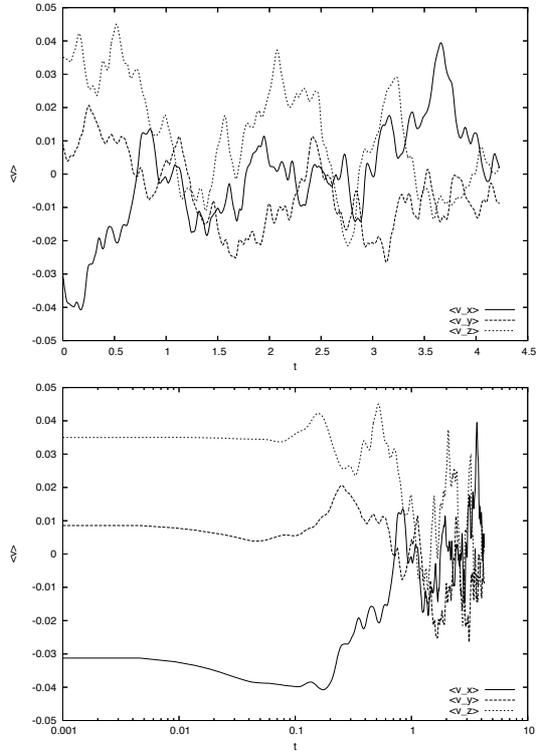


Figura 5.4: Media delle tre componenti cartesiane v_x , v_y , v_z della velocità di una particella.

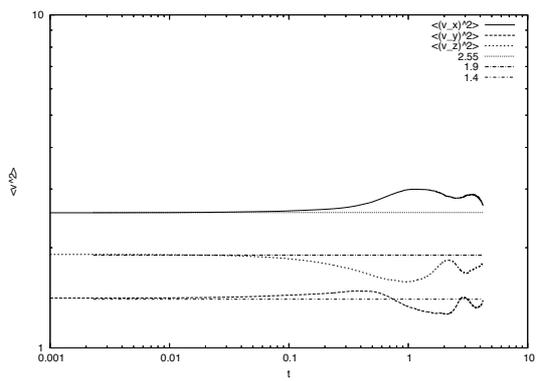


Figura 5.5: Varianza delle tre componenti cartesiane v_x , v_y , v_z della velocità di una particella.

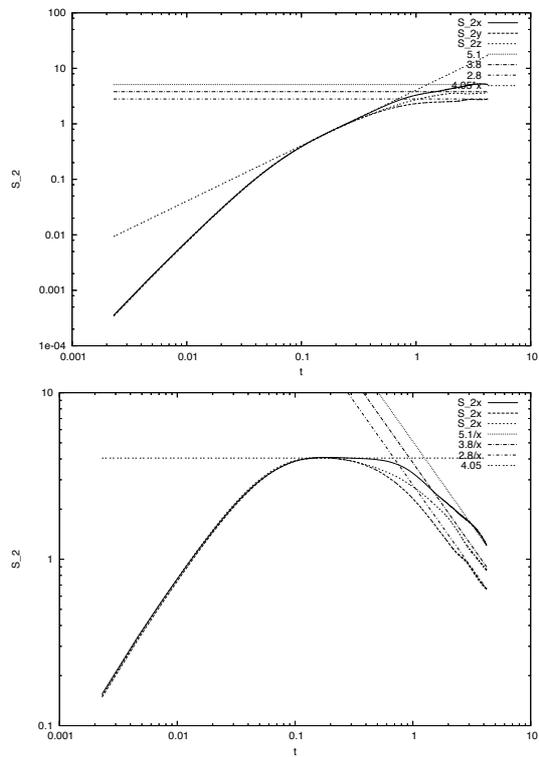


Figura 5.6: Funzione di struttura lagrangiana del secondo ordine delle tre componenti cartesiane.

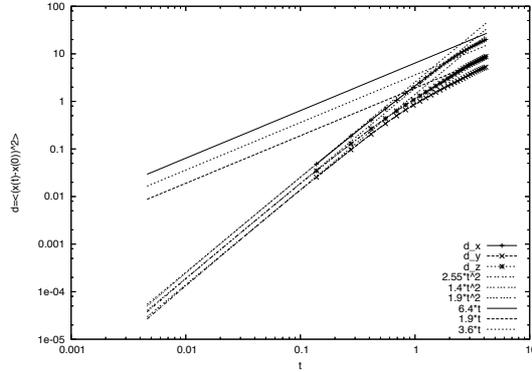


Figura 5.7: Grafico dello spostamento quadratico medio $\langle (x_i(t) - x_i(0))^2 \rangle$ confrontato con i risultati predetti da G.I. Taylor ed esposti nel capitolo 2.

da cui si ottengono i tempi scala delle tre componenti cartesiane e da questi i tre coefficienti di diffusione $D_i = 2\sigma_i^2\tau_i$. I valori numerici di τ_x , τ_y , τ_z e D_x , D_y e D_z sono riportati in tabella 5.2.

i	$\sigma_i^2 = \langle v_i^2 \rangle$	$\tau_i = 2\sigma_i^2 / (C_0\varepsilon)$	$D_i = 2\sigma_i^2\tau_i$	$\lambda_i = \varepsilon^{-1}(2\sigma_i^2/C_K)^{3/2}$
x	2.55	1.26	6.42	4.99
y	1.4	0.69	1.93	2.03
z	1.9	0.94	3.57	3.21

Tabella 5.2: Valori numerici della varianza, il tempo scala, il coefficiente di diffusione e la lunghezza di scala delle tre componenti cartesiane per $C_0 = 5$ e $C_K = 2.01$.

In Fig. 5.7 sono invece riportati i grafici di dispersione assoluta dai quali si osserva la bontà dei risultati predetti da G.I. Taylor [128] (capitolo 2) e la coerenza con le stime precedenti di σ_x , σ_y e σ_z .

Altra importante caratteristica del flusso è la funzione di struttura euleriana del secondo ordine. Sebbene i dati raccolti siano lagrangiani è stata misurata la differenza di velocità ad intervalli fissati (come nel caso euleriano) e poi mediata sull'insieme delle particelle e nel tempo: il grafico è esposto in Fig. 5.8.

In questo caso, l'esistenza di un intervallo spaziale isotropo, da contrapporre a quello temporale di Fig. 5.6, esclusa la parte viscosa, è meno evidente, esiste però un intervallo di sovrapposizione delle componenti y e z . In particolare si osserva che le curve per grandi separazioni sentono la non isotropia e, mentre le componenti y e z appaiono convergere al valore $2\sigma_i^2$, così non è per la componente x . Tralasciando la forte energia ancora attiva nella direzione x , che, come già visto nella stima delle varianze Fig. 5.5, è

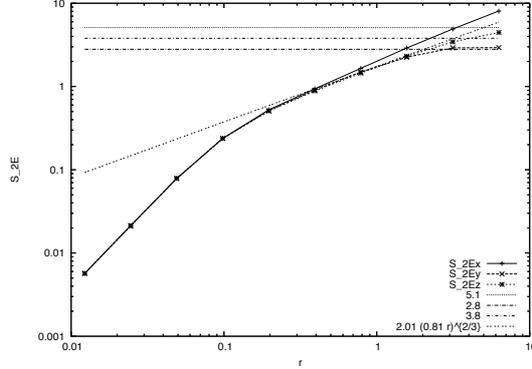


Figura 5.8: La funzione di struttura stimata a separazioni fisse e mediata sull'insieme delle particelle e nel tempo.

la componente con maggiore energia, si nota che l'andamento predetto dall'analisi dimensionale è colto per circa una decade ed il valore della costante associata $C_K = 2.01$, quello maggiormente supportato in letteratura [120], ne è un buona interpolazione.

Applicando anche nel caso euleriano l'idea delle formule (5.4-5.5) (capitolo 3 e [79]) si ottiene

$$\langle (v_i(\mathbf{r}) - v_i(0))^2 \rangle = C_K (\varepsilon r)^{2/3} = 2\sigma_i^2 \left(\frac{r}{\lambda_i} \right)^{2/3}, \quad (5.6)$$

$$\lambda_i = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{2\sigma_i^2}{C_K} \right)^{3/2}, \quad (5.7)$$

da cui si ricavano le tre scale spaziali λ_x , λ_y , λ_z i cui valori sono riportati in tabella 5.2.

Dalle informazioni sin qui raccolte, è possibile stimare il valore del rapporto tra la scala lagrangiana e quella euleriana, come nel capitolo 3 (3.111). Nel caso di turbolenza omogenea ed isotropa si avrebbero, per le tre componenti cartesiane, identici valori di σ_i , τ_i e λ_i i quali definirebbero, in modo unico, il rapporto (3.111)

$$\beta = \frac{\sqrt{2}\sigma\tau}{\lambda} = \frac{C_K^{3/2}}{C_0},$$

dove la seconda identità segue dalle formule (5.5) e (5.7). Nel nostro caso, assunti come unici i valori di C_0 e C_K , si hanno tre distinti valori per le quantità σ_i , τ_i e λ_i riportati in tabella 5.2, tuttavia, si ha

$$\beta = \beta_i = \frac{\sqrt{2}\sigma_i\tau_i}{\lambda_i} = \frac{C_K^{3/2}}{C_0} \sim 0.6, \quad i = x, y, z. \quad (5.8)$$

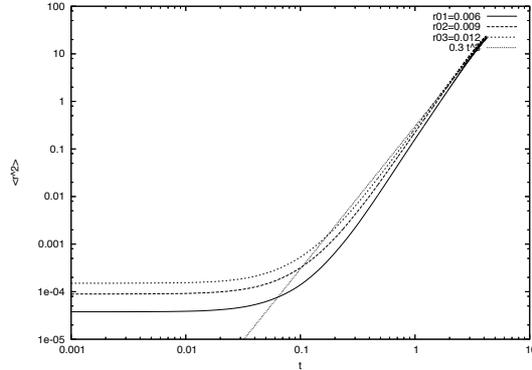


Figura 5.9: Legge di Richardson (2.73).

Il valore ottenuto in (5.8) è consistente con quello stimato sperimentalmente [112].

5.2 Statistiche lagrangiane relative

La quantità relativa lagrangiana di maggiore rilevanza è certamente il modulo del vettore di separazione tra le due particelle. Nel 1926, L.F. Richardson [105] predisse il comportamento della varianza del modulo di tale vettore e la sua PDF nel caso in cui esso appartenga all'intervallo inerziale, come analizzato nel capitolo 2.

In Fig. 5.9 è riportato il grafico dell'andamento di $\langle r^2 \rangle$ in funzione del tempo e confrontato con la legge di Richardson (2.73).

Si osserva subito che non si verifica il comportamento predetto nell'intervallo inerziale: le statistiche non sono indipendenti dalla condizione iniziale e non presentano un regime t^3 eccetto che per tempi superiori a $t = 2$. Il grafico è stato interpolato con il coefficiente $g\varepsilon = 0.3$ da cui si ottiene $g = 0.37$. Questo valore di g è minore di quello misurato sperimentalmente in [93] e numericamente in [13]. Tuttavia, data l'enorme variabilità delle stime di g , il valore trovato risulta consistente nell'ordine di grandezza con larga parte della letteratura [93].

In Fig. 5.10 sono riportate le densità di probabilità di r in tre diversi istanti e confrontate con la PDF di Richardson (2.69). Si osserva che, nell'intervallo temporale durante il quale esiste un comportamento t^3 , la PDF di Richardson approssima molto bene quella misurata.

Analizzando il comportamento statistico di quantità relative, è interessante studiare la decorrelazione della differenza di velocità tra le particelle. In analogia con il caso della dispersione assoluta, si può definire un coefficiente di correlazione lagrangiano, per entrambe le componenti, come

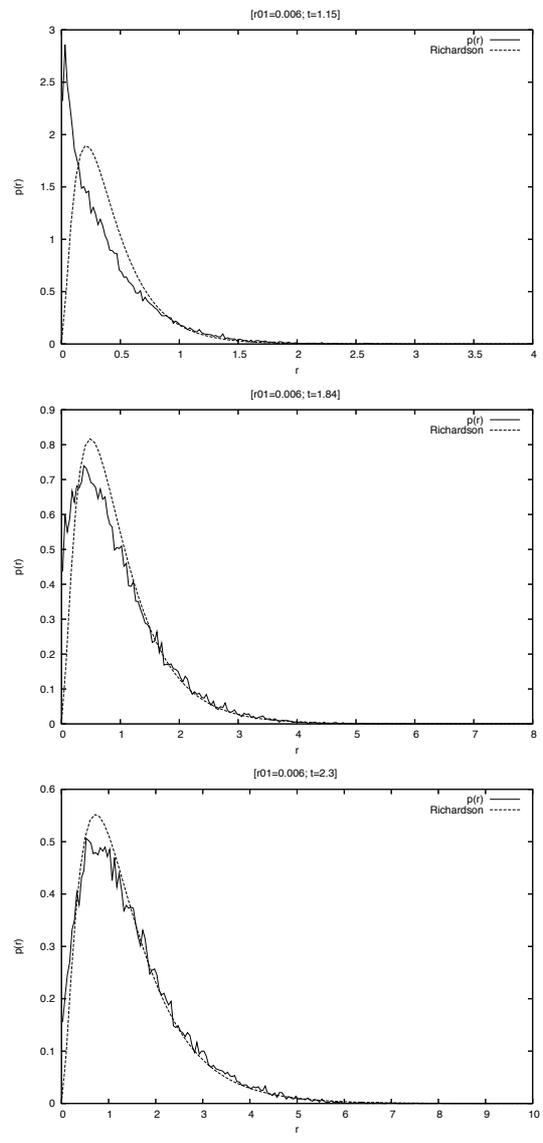


Figura 5.10: Densità di probabilità di r confrontata con la PDF di Richardson (2.69) nel caso del primo tipo di separazione iniziale in tre istanti distinti: $t = 1.15, 1.84, 2.3$.

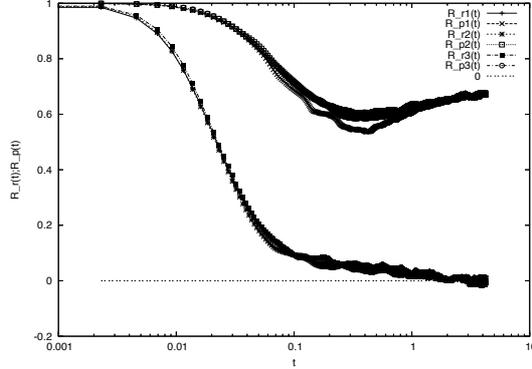


Figura 5.11: I coefficienti di correlazione lagrangiana della differenza di velocità definiti in (5.9-5.10) con le tre separazioni iniziali.

segue

$$R_{\parallel} = \frac{\langle u_{\parallel}(t)u_{\parallel}(0) \rangle}{\langle u_{\parallel}^2(t) \rangle^{1/2} \langle u_{\parallel}^2(0) \rangle^{1/2}}, \quad (5.9)$$

$$R_{\perp} = \frac{\langle u_{\perp}(t)u_{\perp}(0) \rangle}{\langle u_{\perp}^2(t) \rangle^{1/2} \langle u_{\perp}^2(0) \rangle^{1/2}}, \quad (5.10)$$

il loro grafico è riportato in Fig.5.11.

Si osserva subito che, mentre la componente longitudinale descrive una classica curva di decorrelazione, la componente trasversa non decorrela nel tempo di durata dell'intera simulazione. Inoltre, la curva relativa alla componente trasversa sembra riniziare a crescere. Questo secondo effetto potrebbe interpretarsi come generatore dei vortici. Infatti, la componente trasversa induce sul moto della coppia di particelle una rotazione durante la quale esse conservano la loro struttura, ne segue che la componente trasversa impone anche una maggiore correlazione; la scala di tali vortici è definita dalla separazione.

Dalla definizione di coefficiente di correlazione (5.9-5.10) segue che il tempo di decorrelazione sarà

$$T_{\parallel} = \int_0^{\infty} R_{\parallel}(t) dt. \quad (5.11)$$

Occorre ricordare che, trattandosi di quantità relative, la varianza presente al denominatore in (5.9) $\langle u_{\parallel}^2(t) \rangle^{1/2}$ risulta essere una funzione del tempo, diversamente dal caso ad una particella, un tempo di decorrelazione per u_{\perp} non è invece definibile. Eseguendo il conto di T_{\parallel} (5.11) in forma discretizzata si ottiene

$$T_{\parallel} = \sum_{i=1}^N R_{\parallel}(t_i) \Delta t \sim 0.12, \quad (5.12)$$

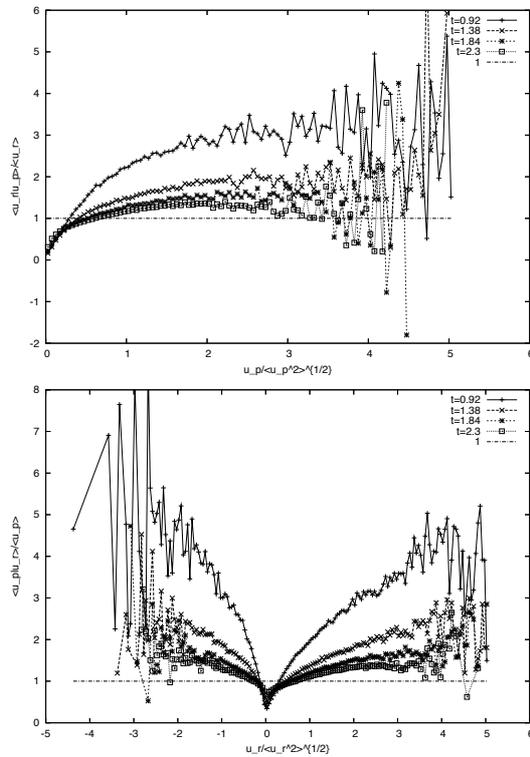


Figura 5.12: La media condizionata della componente longitudinale delle differenza di velocità $\langle u_r | u_p \rangle$, scalata sul suo valor medio $\langle u_r \rangle$, come funzione del modulo delle componenti trasverse u_p , scalato sulla sua varianza $\langle u_p^2 \rangle^{1/2}$, in quattro istanti di tempo e confrontata con il valore ottenuto nel caso di indipendenza statistica $\langle u_r | u_p \rangle / \langle u_r \rangle = 1$ (sopra). Lo stesso grafico con le variabili scambiate (sotto).

che risulta essere un ordine di grandezza inferiore al tempo scala che si può stimare dal grafico di Fig. 5.9. Questo risultato è consistente con l'idea introdotta sopra per cui la componente trasversa imprime alla coppia di particelle un moto rotatorio dal quale si genera il vortice. Nel compiere la rotazione le coppie conservano più a lungo la loro struttura, poiché ruotando è ridotta la separazione, ne segue che questo induce un tempo di correlazione maggiore. Questo fatto, dal punto di vista statistico, potrebbe indicare una minore variabilità della componente trasversa rispetto a quella longitudinale.

Per la loro importanza nella ricerca di una determinazione dei modelli stocastici di dispersione relativa, sono state misurate le medie condizionate delle componenti del vettore differenza di velocità u_{\parallel} e u_{\perp} : i risultati sono esposti nelle Figure 5.12, 5.13, 5.14.

Come evidenziato dai grafici, esiste una relazione tra le due componenti della differenza di velocità il cui effetto si riduce con il trascorrere del tempo

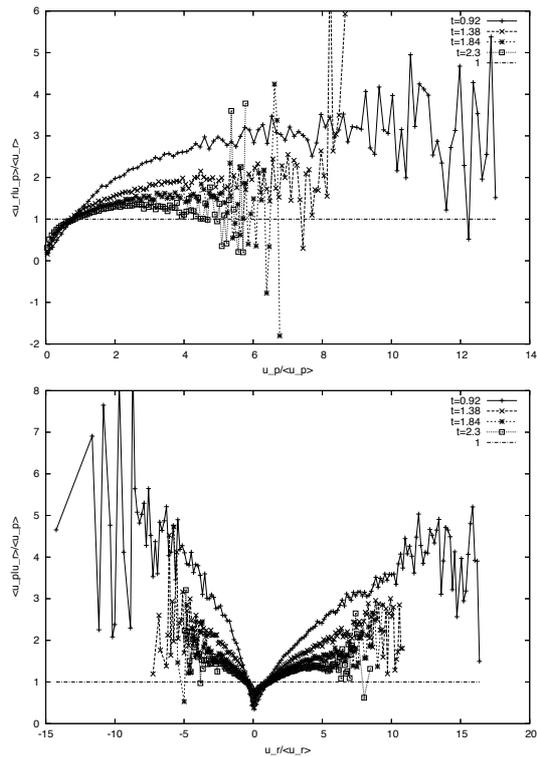


Figura 5.13: La media condizionata della componente longitudinale delle differenza di velocità $\langle u_r | u_p \rangle$, scalata sul suo valor medio $\langle u_r \rangle$, come funzione del modulo delle componenti trasverse u_p , scalato sul suo valor medio $\langle u_p \rangle$, in quattro istanti di tempo e confrontata con il valore ottenuto nel caso di indipendenza statistica $\langle u_r | u_p \rangle / \langle u_r \rangle = 1$ (sopra). Lo stesso grafico con le variabili scambiate (sotto).

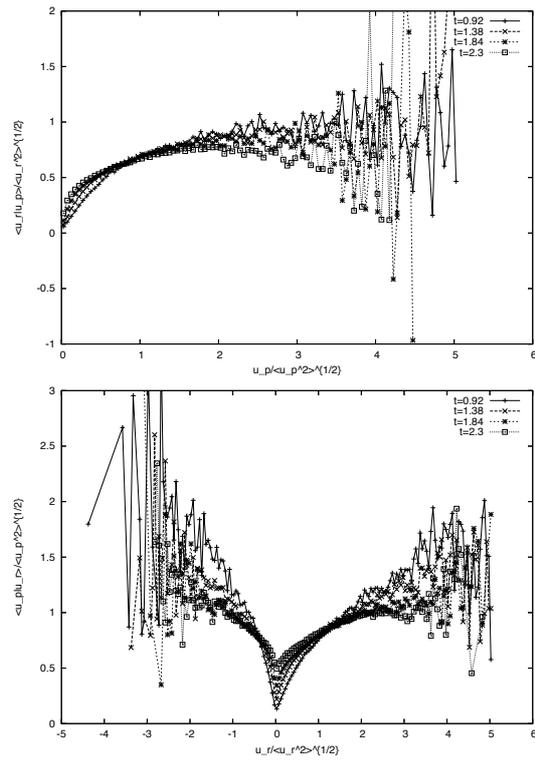


Figura 5.14: La media condizionata della componente longitudinale delle differenze di velocità $\langle u_r | u_p \rangle$, scalata sulla sua varianza $\langle u_r^2 \rangle^{1/2}$, come funzione del modulo delle componenti trasverse u_p , anch'esso scalato sulla sua varianza $\langle u_p^2 \rangle^{1/2}$, in quattro istanti di tempo e confrontata con il valore ottenuto nel caso di indipendenza statistica $\langle u_r | u_p \rangle / \langle u_r \rangle = 1$ (sopra). Lo stesso grafico con le variabili scambiate (sotto).

e, conseguentemente, con l'aumentare della separazione quadratica media tra le particelle.

La differenza tra i grafici delle Figure 5.12, 5.13, 5.14 consiste nelle tre diverse scelte con cui sono state scalate le quantità. Dai grafici 5.12, 5.13 è evidente la dipendenza statistica tra u_{\parallel} e u_{\perp} , mentre in Fig. 5.14 si osserva un collasso dei grafici che fa supporre che esista una autosimilarità. Tuttavia, un completo collasso non si osserva probabilmente perché le statistiche andrebbero centrate, essendo le medie di entrambe le quantità non nulle Fig. 5.18.

5.3 Densità di probabilità

L'analisi delle PDF delle quantità relative mette in luce alcune caratteristiche importanti del processo della dispersione tra due particelle. Come è noto, infatti, la densità di probabilità contiene l'informazione associata alla conoscenza di tutti i momenti statistici e non solo di alcuni.

Nel caso di un processo stazionario, le particelle sono in equilibrio con il flusso ad ogni istante, in particolare quindi, all'istante iniziale della simulazione, le caratteristiche associate ad ogni coppia di particelle corrispondono a quelle euleriane con una separazione uguale a quella della coppia. Perché le caratteristiche studiate siano ancora quelle euleriane occorrerebbe osservare il flusso in punti a separazioni note, in realtà i dati sono raccolti lagrangianamente e quindi, negli istanti successivi a quello iniziale, le caratteristiche della separazione associate ad una precisa coppia sentono le condizioni iniziali della specifica coppia.

Le PDF euleriane sono riportate nelle Figure 5.15, 5.16 dalle quali è evidente l'autosimilarità nella stessa forma suggerita dal grafico di Fig. 5.14, nonostante questo fosse per le statistiche lagrangiane. L'autosimilarità è migliorata, come già osservato, centrando le statistiche della componente u_{\perp} (poiché la media euleriana di u_{\parallel} è nulla, tabella 5.3) e quindi la PDF euleriana sarà del tipo

$$p_E(u_{\parallel}, u_{\perp}; r) = \frac{N}{\sigma_{\parallel} \sigma_{\perp}} f\left(\frac{u_{\parallel}}{\sigma_{\parallel}}, \frac{u_{\perp} - \langle u_{\perp} \rangle}{\sigma_{\perp}}\right), \quad (5.13)$$

dove $\sigma_{\parallel} = (\langle u_{\parallel}^2 \rangle)^{1/2}$ e $\sigma_{\perp} = (\langle u_{\perp}^2 \rangle - \langle u_{\perp} \rangle^2)^{1/2}$. Le separazioni iniziali considerate sono tutte dell'ordine dell'intervallo viscoso, pertanto non ci si può aspettare un comportamento dimensionale dei momenti statistici del tipo di quello dell'intervallo inerziale. Si noti che la PDF nel grafico sotto di Fig. 5.16 si estende anche per valori negativi perché la variabile considerata $(u_{\perp} - \langle u_{\perp} \rangle)/\sigma_{\perp}$, essendo $\langle u_{\perp} \rangle \neq 0$, ha come valore minimo $-\langle u_{\perp} \rangle/\sigma_{\perp}$.

Attraverso i dati delle PDF, come in (5.12), è possibile stimare i momenti attraverso la formula discretizzata

$$\langle z^m \rangle = \int z^m p(z) dz \sim \sum z_i^m p(z_i) \Delta z, \quad (5.14)$$

ed i risultati sono raccolti nelle tabelle 5.3, 5.4 per la componente longitudinale e 5.5, 5.6 per il modulo di quelle trasverse. Per quanto riguarda u_{\parallel} si nota che la media è zero e che la skewness è negativa.

p_E^{\parallel}	r=0.006	r=0.009	r=0.012
$\langle u_{\parallel}^0 \rangle$	0.99999	1.00000	0.99999
$\langle u_{\parallel} \rangle$	8.7e-07	-4.2e-07	4.7e-07
$\langle u_{\parallel}^2 \rangle$	0.00223	0.00524	0.00874
$\langle u_{\parallel}^3 \rangle$	-5.4e-05	-2.1e-04	-3.9e-04
$\langle u_{\parallel}^4 \rangle$	2.9e-04	1.7e-04	4.5e-04
Skewness	-0.51	-0.54	-0.48
Kurtosis	5.92	6.07	5.89

Tabella 5.3: Misure dei momenti statistici della PDF euleriana di u_{\parallel} non scalata in Fig. 5.15.

p_E^{\parallel}	r=0.006	r=0.009	r=0.012
$\langle u_{\parallel}^0 \rangle$	1.00000	0.99977	0.99999
$\langle u_{\parallel} \rangle$	1.8e-05	-5.6e-06	5.0e-06
$\langle u_{\parallel}^2 \rangle$	1.00010	0.99995	1.00013
$\langle u_{\parallel}^3 \rangle$	-0.51	-0.54	-0.48
$\langle u_{\parallel}^4 \rangle$	5.94	6.07	5.89
Skewness	-0.51	-0.54	-0.48
Kurtosis	5.92	6.07	5.89

Tabella 5.4: Misure dei momenti statistici della PDF euleriana di u_{\parallel} scalata in Fig. 5.15.

Il grafico della PDF lagrangiana, scalata rispetto alla varianza, della componente longitudinale della differenza di velocità è riportato in Fig. 5.17 e confrontata con la PDF euleriana, cioè quella iniziale; i momenti statistici sono riportati in tabella 5.7.

Nel grafico di Fig. 5.17 si nota molto chiaramente che il massimo della PDF si sposta dal semipiano positivo, tipico della PDF euleriana (skewness negativa), a quello negativo: da questa transizione segue un cambiamento di segni della skewness che pertanto risulta positiva, tabella 5.7. Dai grafici riportati non si osserva una netta autosimilarità, tuttavia si distinguono due regimi: il primo negli istanti $t = 0.184, 0.368$ ed il secondo a $t = 1.104, 1.472$.

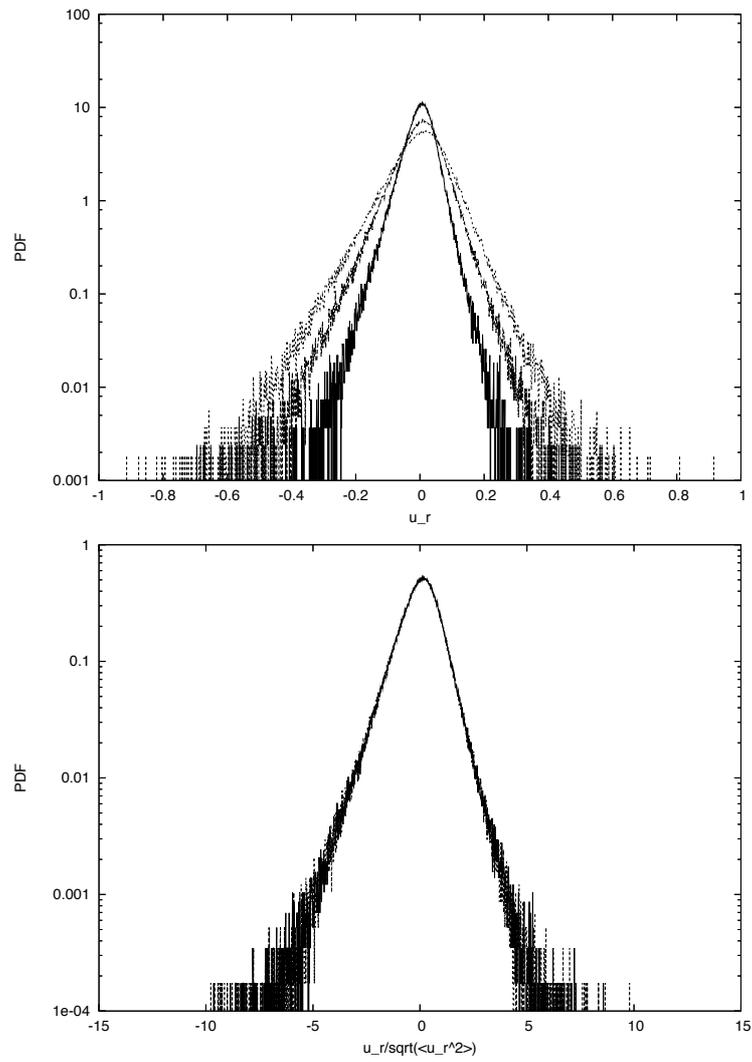


Figura 5.15: La PDF euleriana di u_{\parallel} nelle tre separazioni iniziali $r_0 = 0.006, 0.009, 0.012$, non scalata (sopra) e scalata (sotto).

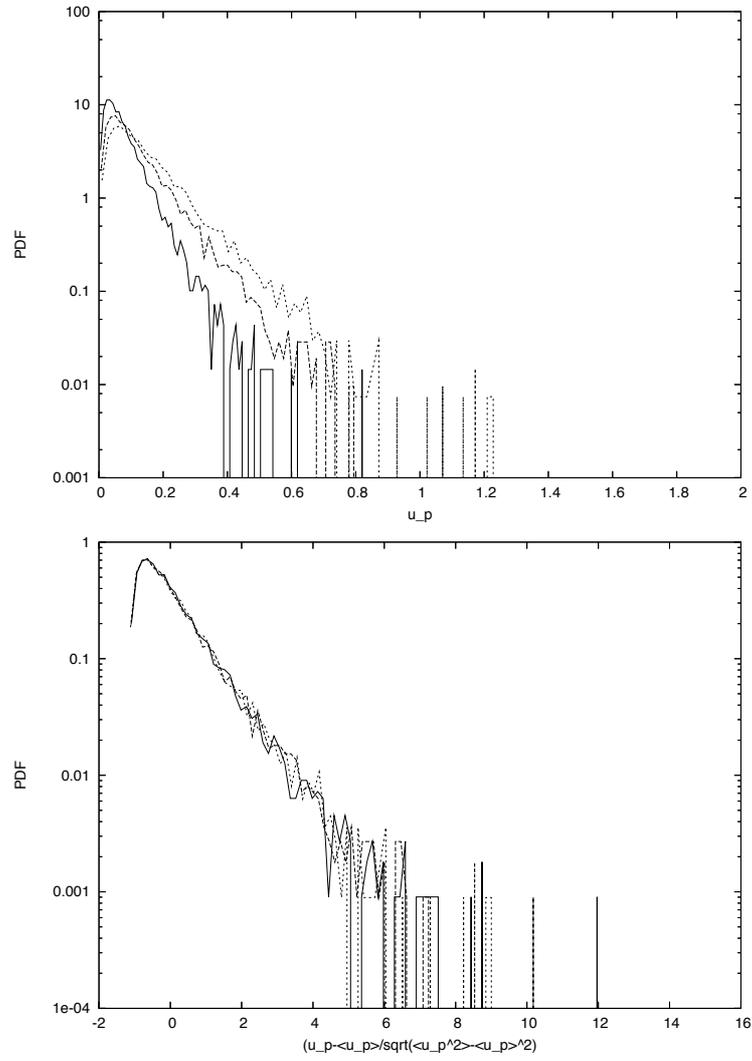


Figura 5.16: La PDF euleriana di u_{\perp} nelle tre separazioni iniziali $r_0 = 0.006, 0.009, 0.012$, non scalata (sopra) e scalata (sotto).

p_E^\perp	r=0.006	r=0.009	r=0.012
$\langle u_\perp^0 \rangle$	1.00000	0.99999	0.99996
$\langle u_\perp \rangle$	0.728	0.111	0.144
$\langle u_\perp^2 \rangle$	0.0092	0.02124	0.03524
$\langle u_\perp^3 \rangle$	0.00185	0.00618	0.01315
$\langle u_\perp^4 \rangle$	0.00055	0.00248	0.00689
Skewness	2.094	1.996	1.989
Kurtosis	6.512	5.493	5.552

Tabella 5.5: Misure dei momenti statistici della PDF euleriana di u_\perp non scalata in Fig. 5.16.

p_E^\perp	r=0.006	r=0.009	r=0.012
$\langle u_\perp^0 \rangle$	0.99995	0.99996	0.99998
$\langle u_\perp \rangle$	-1.8e-04	-2.3e-04	9.4e-04
$\langle u_\perp^2 \rangle$	1.00206	1.00287	1.0023
$\langle u_\perp^3 \rangle$	2.506	2.195	2.233
$\langle u_\perp^4 \rangle$	14.578	10.744	11.473
Skewness	2.499	2.185	2.226
Kurtosis	14.518	10.683	11.420

Tabella 5.6: Misure dei momenti statistici della PDF euleriana di u_\perp scalata in Fig. 5.16.

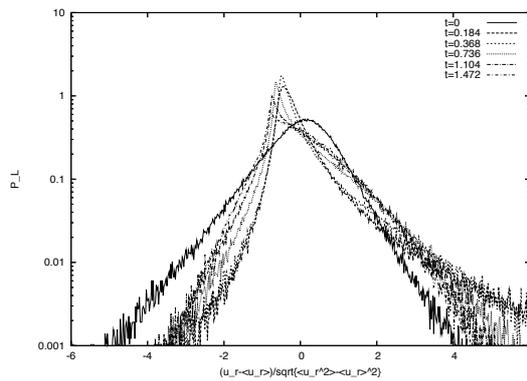


Figura 5.17: La PDF lagrangiana di u_\parallel con $r_0 = 0.006$ in sei istanti di tempo: $t = 0, 0.184, 0.368, 0.736, 1.104, 1.472$.

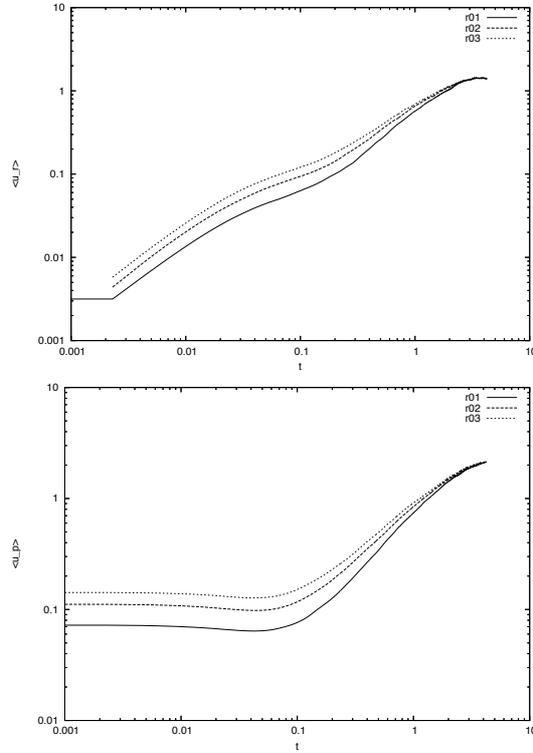


Figura 5.18: Media di u_{\parallel} e u_{\perp} in funzione del tempo con le tre separazioni iniziali.

p_L^{\parallel}	t=0.184	t=0.368	t=0.736	t=1.104	t=1.472
$\langle u_{\parallel}^0 \rangle$	1.00297	0.99975	0.99976	0.99982	0.99958
$\langle u_{\parallel}^1 \rangle$	-1.2e-04	-1.5e-05	-1.1e-05	-3.9e-06	-1.8e-05
$\langle u_{\parallel}^2 \rangle$	1.00227	0.99981	1.00012	1.00011	0.9998
$\langle u_{\parallel}^3 \rangle$	3.47939	2.81955	1.58394	1.03631	0.7772
$\langle u_{\parallel}^4 \rangle$	23.22536	15.64735	7.30251	5.1916	4.45513

Tabella 5.7: Misure dei momenti statistici centrati della PDF lagrangiana di u_{\parallel} in Fig. 5.17.

5.4 Connessione con i modelli stocastici

Nel capitolo 3, è stata derivata, seguendo D.J. Thomson [132], la relazione tra i modelli stocastici e l'equazione dinamica che regge il processo (3.99). Ora si vuole evidenziare la connessione tra le simulazioni numeriche ed i modelli stocastici.

Nella simulazione numerica, l'accelerazione di ciascuna particella è espressa dalla formula (5.3). Confrontando le equazioni (3.99) e (5.3) si ottiene

$$-\frac{1}{\rho}\nabla_x p(\mathbf{X}, t) + \nu\nabla^2 u_i(\mathbf{X}(t; \mathbf{x}_0), t) = \left\langle \frac{Du_i}{Dt} \middle| \mathbf{u}, \mathbf{r}, t \right\rangle + \frac{C_0\varepsilon}{2p_E} \frac{\partial p_E}{\partial u_i}, \quad (5.15)$$

escludendo dal confronto entrambi i termini di rumore perché simili $F_i \sim \sqrt{C_0\varepsilon} dW_i/dt$. Dalla (5.15) si ha che, sia nelle simulazioni numeriche che nel modello stocastico attraverso la media condizionata, l'accelerazione lagrangiana viene calcolata specificando i contributi dovuti alla pressione ed alla viscosità con la velocità e la posizione propri delle particelle. Tuttavia, nel modello stocastico è presente un termine che è funzione esplicita della PDF euleriana p_E . Esso risulta dovuto ad una forma del teorema fluttuazione-dissipazione e discosta l'accelerazione di ogni singola realizzazione dal corrispondente valore medio condizionato. Tale termine, però, non altera le statistiche d'insieme. Infatti, calcolando la media d'insieme della (5.15) si ha correttamente una identità poiché vale

$$\left\langle \frac{C_0\varepsilon}{2p_E} \frac{\partial p_E}{\partial u_i} \right\rangle = \frac{C_0\varepsilon}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{p_E} \frac{\partial p_E}{\partial u_i} p_E du_i = 0.$$

I risultati ottenuti dai dati numerici suggeriscono alcune conclusioni per i modelli stocastici analizzati. Dai grafici delle Figure 5.12, 5.13, 5.14 segue che l'assunzione di O.A. Kurbanmuradov (4.75) non può essere utilizzata in fluidodinamica. La dipendenza delle statistiche condizionate di u_\perp dalla variabile u_\parallel , nelle Figure 5.12, 5.13, 5.14, potrebbe suggerire che anche il modello cinematico proposto nel paragrafo 4.2.4 non sia accettabile, essendo le statistiche di u_\perp determinate in maniera indipendente. Tuttavia, in questo caso, occorre ricordare che il modello vieta l'indipendenza statistica tra le componenti a tutte le scale, pertanto l'equazione stocastica che determina u_\perp deve essere intesa come generatrice dei valori estratti dalla PDF marginale.

Appendice A

Data una funzione $f(r)$, $r \in R^+$, si definisce trasformata di Mellin di $f(r)$ la funzione

$$f^*(s) = \int_0^{+\infty} f(r)r^{s-1}dr, \quad s \in C, \quad \gamma_1 < \Re(s) < \gamma_2, \quad (\text{A.1})$$

e vale la trasformata inversa

$$f(r) = \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} f^*(s)r^{-s}ds, \quad (\text{A.2})$$

dove $\gamma = \Re(s)$ e $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$. I teoremi di esistenza delle formule (A.1-A.2) si possono trovare, ad esempio, nel libro di O.I. Marichev [76].

La trasformata di Mellin emerge in maniera naturale nel caso in cui si consideri l'equazione di Laplace in coordinate polari per la funzione $h(r, \theta)$ ([118] p. 268)

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2} = 0, \quad (\text{A.3})$$

dove $r > 0$ e θ sono il raggio e l'angolo nel nuovo sistema di riferimento. Attraverso il metodo dell'integrazione per parti si osserva che

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{s+1} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) dr &= \int_0^\infty r^s \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial h}{\partial r} \right) dr \\ &= \left[r^{s+1} \frac{\partial h}{\partial r} - sr^s h \right]_0^\infty + s^2 \int_0^\infty h r^{s-1} dr, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

se il termine tra parentesi quadre si annulla si ottiene

$$\int_0^\infty r^{s+1} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \right) dr = s^2 h^*(s, \theta), \quad (\text{A.5})$$

dove $h^*(s, \theta)$ è la trasformata di Mellin (A.1) della funzione $h(r, \theta)$ rispetto alla variabile r . Dalla formula (A.5) si ottiene l'identità

$$\int_0^\infty r^{s-1} \left(r^2 \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + r \frac{\partial h}{\partial r} \right) dr = s^2 h^*(s, \theta), \quad (\text{A.6})$$

e quindi la coppia

$$r^2 \frac{\partial^2 h}{\partial r^2} + r \frac{\partial h}{\partial r} \xleftrightarrow{\mathcal{M}} s^2 h^*(s). \quad (\text{A.7})$$

Nel caso dell'equazione (4.97), moltiplicando per u_\perp^2 , si ha

$$u_\perp^2 \frac{\partial^2 p_\perp}{\partial u_\perp^2} + u_\perp \frac{\partial p_\perp}{\partial u_\perp} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Poichè $u_\perp > 0$ e p_\perp è una PDF, si può applicare la trasformata di Mellin (A.1) alla (A.8) e dalla (A.7) si ottiene

$$s^2 p_\perp^*(s) = 0, \quad (\text{A.9})$$

da cui segue che $p_\perp^*(s) = 0$ e quindi, dalla (A.2), si ha che la soluzione della (A.8) è identicamente nulla per tutti i valori di u_\perp . Concludendo, non esiste alcuna funzione non nulla soluzione dell'equazione (4.97).

Bibliografia

- [1] S. Alberghi. *Sviluppo di un Modello Lagrangiano della Dispersione Turbolenta in Flussi Geofisici*. Università degli Studi di Bologna, 2000. Tesi di laurea.
- [2] D. Anfossi, G. Degrazia, E. Ferrero, S. E. Gryning, M. G. Morselli, and S. Trini Castelli. Estimation of the Lagrangian structure function constant C_0 from surface-layer wind data. *Boundary-Layer Meteorol.*, 95:249–270, 2000.
- [3] F. Anselmet, Y. Gagne, E. J. Hopfinger, and R. A. Antonia. High-order velocity structure functions in turbulent shear flows. *J. Fluid Mech.*, 140:63–89, 1984.
- [4] H. Aref. The numerical experiment in fluid mechanics. *J. Fluid Mech.*, 173:15–41, 1986.
- [5] V. I. Arnold. O prepodavanii matematiki. *Uspehi Mat. Nauk*, pages 1–8, 1998. <http://www.pdmi.ras.ru/arnsem/Arnold/arn-papers.html>.
- [6] G. K. Batchelor. Diffusion in a field of homogeneous turbulence. I. Eulerian analysis. *Austral. J. Sci. Res.*, 2(4):437–450, 1949.
- [7] G. K. Batchelor. The application of the similarity theory of turbulence to atmospheric diffusion. *Quart. J. R. Meteorol. Soc.*, 76:133–146, 1950.
- [8] G. K. Batchelor. Note on free turbulence flows, with special reference to the two-dimensional wake. *J. Aeronaut. Sci.*, 17:441–445, 1950.
- [9] G. K. Batchelor. Pressure fluctuations in isotropic turbulence. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 47:359–374, 1951.
- [10] G. K. Batchelor. Diffusion in a field of homogeneous turbulence II. The relative motion of particles. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 48:345–362, 1952.
- [11] A. Berlinet and C. Thomas-Agnan. *Reproducing Kernel Hilbert Spaces in Probability and Statistics*. Kluwer Academic Publishers, 2004.

- [12] L. Biferale, G. Boffetta, A. Celani, A. Lanotte, and F. Toschi. Lagrangian statistics in fully developed turbulence. *arXiv:nlin.CD/0402032*, pages 1–4, 2004.
- [13] G. Boffetta and I. M. Sokolov. Relative dispersion in fully developed turbulence: the Richardson’s law and intermittency corrections. *Phys. Rev. Lett.*, 88(9):094501/1–4, 2002.
- [14] N. N. Bogoliubov. Problems of a dynamical theory in statistical physics. In J. De Boer and G. E. Uhlenbeck, editors, *Studies in Statistical Mechanics*, pages 5–118. North-Holland Publishing Company-Amsterdam, 1962.
- [15] T. Bohr, M. H. Jensen, G. Paladin, and A. Vulpiani. *Dynamical Systema Approach to Turbulence*. Cambridge University Press, 1998.
- [16] G. Boniolo. *Metodo e Rappresentazioni del Mondo. Per un’altra Filosofia della Scienza*. Bruno Mondadori, 1999.
- [17] M. S. Borgas. The multifractal nature of turbulent dispersion. In A. V. Johansson and P. H. Alfredsson, editors, *Advances in Turbulence*, volume 3, pages 125–132. Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [18] M. S. Borgas. The multifractal lagrangian nature of turbulence. *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, 342:379–411, 1993.
- [19] M. S. Borgas, T. K. Flesch, and B. L. Sawford. Turbulent dispersion with broken reflectional symmetry. *J. Fluid Mech.*, 332:141–156, 1997.
- [20] M. S. Borgas and B. L. Sawford. The small-scale structure of acceleration correlations and its role in the statistical theory of turbulent dispersion. *J. Fluid Mech.*, 228:295–320, 1991.
- [21] M. S. Borgas and B. L. Sawford. A family of stochastic models for two-particle dispersion in isotropic homogeneous stationary turbulence. *J. Fluid Mech.*, 279:69–99, 1994.
- [22] M. S. Borgas and P. K. Yeung. Conditional fluid-particle accelerations in turbulence. *Theor. and Comput. Fluid Dynamics*, 11:69–93, 1998.
- [23] M. S. Borgas and P. K. Yeung. Relative dispersion in isotropic turbulence. Part 2. A new stochastic model with Reynolds-number dependence. *J. Fluid Mech.*, 503:125–160, 2004.
- [24] S. T. Bramwell, P. C. W. Holdsworth, and J.-F. Pinton. Universality of rare fluctuations in turbulence and critical phenomena. *Nature*, 396:552–554, 1998.

- [25] R. E. Britter and S. R. Hanna. Flow and dispersion in urban areas. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 35:469–496, 2003.
- [26] J. G. Charney, R. Fj'rtoft, and J. von Neumann. Numerical integrations of the barotropic vorticity equations. *Tellus*, 2:237–254, 1950.
- [27] P. Chatwin and P. Sullivan. The structure and magnitude of concentration fluctuations. *Boundary-Layer Meteorol.*, 62:269–280, 1993.
- [28] S. Corrsin. Progress report on some turbulent diffusion research. *Advan. Geophys.*, 6:161–164, 1959.
- [29] S. Corrsin. Theories of turbulent dispersion. In *Mécanique de la Turbulence*, pages 27–52. CNRS, Parigi, 1962.
- [30] S. Corrsin. Estimates of the relations between Eulerian and Lagrangian scales in large Reynolds number turbulence. *J. Atmos. Sci.*, 20:115–119, 1963.
- [31] S. Corrsin. Limitations of gradient transport models in random walks and in turbulence. *Advan. Geophys.*, 18A:25–60, 1974.
- [32] J. Kampé de Fériet. Les fonctions aléatoires stationnaires et la théorie statistique de la turbulence homogène. *Ann. Soc. Sci. de Brux.*, 59:145–, 1939.
- [33] G. D. Egbert and M. B. Baker. Comments on paper ‘The effect of Gaussian particle-pair distribution functions in the statistical theory of concentration fluctuations in homogeneous turbulence’ by B. L. Sawford (Q.J. April 1983, 109, 339–353). *Quart. J. R. Meteorol. Soc.*, 110:1195–1199, 1984.
- [34] R. Feynman. *La Fisica di Feynman*, volume 2. Zanichelli, 2001.
- [35] G. Finzi, G. Pirovano, and M. Volta. *Gestione della Qualità dell’Aria*. McGraw-Hill, 2001.
- [36] P. Franzese and M. S. Borgas. A simple relative dispersion model for concentration fluctuations in contaminant clouds. *J. Appl. Meteor.*, 41:1101–1111, 2002.
- [37] P. Franzese, A. K. Luhar, and M. S. Borgas. An efficient Lagrangian stochastic model of vertical dispersion in the convective boundary layer. *Atmos. Environ.*, 33:2337–2345, 1999.
- [38] U. Frisch. *Turbulence. The Legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, 1996.

- [39] U. Frisch and S. A. Orszag. Turbulence: challenges for theory and experiment. *Physics Today*, 43(jan):24–32, 1990.
- [40] C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences*. Springer-Verlag, second edition, 1990.
- [41] P. Gaspard and X.-J. Wang. Noise, chaos, and (ε, τ) -entropy per unit time. *Phys. Rep.*, 235:291–343, 1993.
- [42] F. A. Gifford. A simultaneous Lagrangian-Eulerian turbulence experiment. *Mon. Wea. Rev.*, 83:293–301, 1955.
- [43] S. Hanna. Lagrangian and Eulerian time-scale relations in the daytime boundary layer. *J. Appl. Meteor.*, 20:242–249, 1981.
- [44] J. S. Hay and F. Pasquill. Diffusion from a continuous source in relation to the spectrum and the scale of turbulence. *Advan. Geophys.*, 6:345–365, 1959.
- [45] W. Heisenberg. Zue statistichen theorie der turbulenz. *Z. Phys.*, 124:628–657, 1948.
- [46] P. Holmes, J. L. Lumley, and G. Berkooz. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge University Press, 1998.
- [47] J. R. Holton. *An Introduction to Dynamic Meteorology*. Academic Press, Inc., 2 edition, 1979.
- [48] J. C. R. Hunt. Industrial and environmental fluid mechanics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 23:1–41, 1991.
- [49] J. C. R. Hunt. What should be the objectives of turbulence research? In R. M. C. So, C. G. Speziale, and B. E. Launder, editors, *Near-Wall Turbulence Flows*, pages 1–19. Elsevier Science Publishers B. V., 1993.
- [50] J. C. R. Hunt. Lewis Fry Richardson and his contributions to mathematics, meteorology, and models of conflict. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 30:xiii–xxxvi, 1998.
- [51] J. C. R. Hunt. Qualitative questions in fluid mechanics. *Appl. Sci. Res.*, 58:483–501, 1998.
- [52] T. Ishihara and Y. Kaneda. Relative diffusion of a pair of fluid particles in the inertial subrange of turbulence. *Phys. Fluids*, 14:L69–L72, 2002.
- [53] K. Ito. On stochastic processes I (infinitely divisible laws of probability). *Jap. J. Math.*, 18:261–301, 1942.

- [54] J. Jimènez. Computing high-Reynolds-number turbulence: will simulations ever replace experiments? *J. of Turbulence*, 4(22):1–14, 2003. <http://jot.iop.org/>.
- [55] M.-C. Jullien, J. Paret, and P. Tabeling. Richardson pair dispersion in two-dimensional turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 82(14):2872–2875, 1999.
- [56] Y. Kaneda and T. Ishida. Suppression of vertical diffusion in strongly stratified turbulence. *J. Fluid Mech.*, 402:311–327, 2000.
- [57] G. E. Karniadakis and S. O. Orszag. Nodes, modes and flow codes. *Physics Today*, Mar:34–42, 1993.
- [58] P. E. Kloeden and E. Platen. *Numerical solution of Stochastic Differential Equations*. Springer-Verlag, 1992.
- [59] K. Koeltzsch. On the relationship between the Lagrangian and Eulerian time scale. *Atmos. Environ.*, 33:117–128, 1999.
- [60] A. N. Kolmogorov. Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 32:16–18, 1941.
- [61] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 30:301–305, 1941.
- [62] A. N. Kolmogorov. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence of a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. Fluid Mech.*, 13:82–85, 1962.
- [63] R. Kraichnan. Relation between Lagrangian and Eulerian correlation times of a turbulent velocity field. *Phys. Fluids*, 7:142–143, 1964.
- [64] R. Kraichnan. Lagrangian velocity covariance in helical turbulence. *J. Fluid Mech.*, 81:385–398, 1977.
- [65] O. A. Kurbanmuradov. Stochastic Lagrangian models for two-particle relative dispersion in high-Reynolds number turbulence. *Monte Carlo Methods and Appl.*, 3(1):37–52, 1997.
- [66] O. A. Kurbanmuradov, S. A. Orszag, K. K. Sabelfeld, and P. K. Yeung. Analysis of relative dispersion of two particles by Lagrangian stochastic models and DNS methods. *Monte Carlo Methods and Appl.*, 7:245–264, 2001.
- [67] O. A. Kurbanmuradov and K. K. Sabelfeld. Stochastic Lagrangian models of relative dispersion of a pair of fluid particles in turbulent flows. *Monte Carlo Methods and Appl.*, 1(2):101–136, 1995.

- [68] O. A. Kurbanmuradov, K. K. Sabelfeld, and D. Koluhin. Stochastic Lagrangian models for two-particle motion in turbulent flows. *Monte Carlo Methods and Appl.*, 3(3):199–223, 1997.
- [69] J. L. Lumley. An approach to the Eulerian-Lagrangian problem. *J. Math. Phys.*, 3(2):309–312, 1962.
- [70] J. L. Lumley and A. M. Yaglom. A century of turbulence. *Flow, Turbulence and Combustion*, 66:241–286, 2001.
- [71] L. J. Lumley. The mathematical nature of the problem of relating Lagrangian and Eulerian statistical functions in turbulence. In *Mécanique de la Turbulence*, pages 17–26. CNRS, Parigi, 1962.
- [72] T. S. Lundgren. Distributions functions in the statistical theory of turbulence. *Phys. Fluids*, 10(5):969–975, 1967.
- [73] T. S. Lundgren. Turbulent pair dispersion and scalar diffusion. *J. Fluid Mech.*, 111:27–57, 1981.
- [74] V. S. L’vov. Universality of turbulence. *Nature*, 396:519–520, 1998.
- [75] N. A. Malik and J. C. Vassilicos. Eulerian and Lagrangian scaling properties of randomly advected vortex tubes. *J. Fluid Mech.*, 326:417–436, 1996.
- [76] O. I. Marichev. *Handbook of Integral Transforms of Higher Transcendental Functions, Theory and Algorithmic Tables*. Ellis Horwood, Chichester, 1983.
- [77] A. Maurizi and S. Lorenzani. On the influence of the Eulerian velocity *pdf* closure on the eddy diffusion coefficient. *Boundary-Layer Meteorol.*, 95:427–436, 2000.
- [78] A. Maurizi and S. Lorenzani. Lagrangian time scales in inhomogeneous non-Gaussian turbulence. *Flow, Turbulence and Combustion*, 67:205–216, 2001.
- [79] A. Maurizi, G. Pagnini, and F. Tampieri. The dependence of relative dispersion on turbulence scales in Lagrangian stochastic models. *Phys. Rev. E*, 69(3):037301/1–4, 2004.
- [80] A. Maurizi and F. Tampieri. Velocity probability density functions in Lagrangian dispersion models for inhomogeneous turbulence. *Atmos. Environ.*, 33:281–289, 1999.
- [81] H. K. Moffat. Transport effects associated with turbulence with particular attention to the influence of helicity. *Rep. Prog. Phys.*, 46:621–664, 1983.

- [82] H. K. Moffat and A. Tsinober. Helicity in laminar and turbulent flow. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 24:281–, 1992.
- [83] A. S. Monin and A. M. Yaglom. *Statistical Fluid Mechanics*, volume I. MIT Press, Cambridge, 1971.
- [84] A. S. Monin and A. M. Yaglom. *Statistical Fluid Mechanics*, volume II. MIT Press, Cambridge, 1975.
- [85] E. A. Novikov. Relation between the Lagrangian and Eulerian description of turbulence. *Appl. Math. Mech.*, 33:887–, 1969.
- [86] E. A. Novikov. The Lagrangian-Eulerian probability relations and the random force method for nonhomogeneous turbulence. *Phys. Fluids*, 29(12):3907–3909, 1986.
- [87] E. A. Novikov. Two-particle description of turbulence, Markov property, and intermittency. *Phys. Fluids A*, 1(2):326–330, 1989.
- [88] E. A. Novikov. Probability distribution for three-dimensional vectors of velocity increments in turbulent flows. *Phys. Rev. A*, 46(10):R6147–R6149, 1992.
- [89] A. M. Obukhov. Energy distribution in the spectrum of turbulent flow. *Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Geogr. Geofiz.*, 5:453–466, 1941.
- [90] A. M. Obukhov. Description of turbulence in terms of Lagrangian variables. *Advan. Geophys.*, 6:113–116, 1959.
- [91] B. Øksendal. *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, Berlin, 5 edition, 1998.
- [92] S. A. Orszag and G. S. Patterson. Numerical simulation of three dimensional homogeneous isotropic turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 28(2):76–79, 1972.
- [93] S. Ott and J. Mann. An experimental investigation of the relative diffusion of particle pairs in three-dimensional turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 422:207–223, 2000.
- [94] G. Pedrizzetti. Quadratic Markov modeling for intermittent turbulence. *Phys. Fluids*, 11(6):1694–1696, 1999.
- [95] G. Pedrizzetti and E. A. Novikov. On Markov modelling of turbulence. *J. Fluid Mech.*, 280:69–93, 1994.
- [96] S. Pope. PDF methods for turbulent reactive flows. *Prog. Energy Combust. Sci.*, 11:119–192, 1985.

- [97] A. La Porta, G. A. Voth, A. M. Crawford, J. Alexander, and E. Bodenschatz. Fluid particle acceleration in fully developed turbulence. *Nature (London)*, 409:1017–1019, 2001.
- [98] L. Prandtl. Meteorologische anwendungen der strömungslehre. *Beitr. Phys. fr. Atmosph.*, 19:188–202, 1932.
- [99] A. M. Reynolds. On trajectory curvature as a selection criterion for valid Lagrangian stochastic dispersion models. *Boundary-Layer Meteorol.*, 88:77–86, 1998.
- [100] A. M. Reynolds. On the non-uniqueness of Lagrangian stochastic models. *Fluid Dyn. Res.*, 25:217–229, 1999.
- [101] A. M. Reynolds. The relative dispersion of particle pairs in stationary homogeneous turbulence. *J. Appl. Meteor.*, 38:1384–1390, 1999.
- [102] A. M. Reynolds. On the dynamical content of Lagrangian stochastic models in the Well-Mixed class. *Boundary-Layer Meteorol.*, 103:143–162, 2002.
- [103] L. F. Richardson. Some measurements of atmospheric turbulence. *Philos. Trans. Roy. Soc. London A*, 582:1–28, 1920.
- [104] L. F. Richardson. *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press, 1922.
- [105] L. F. Richardson. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbor graph. *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 110:709–737, 1926.
- [106] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation. Methods of Solution and Applications*. Springer-Verlag, second edition, 1989.
- [107] H. C. Rodean. Notes on the Langevin model for turbulent diffusion of marked particles. Tech. rep., Lawrence Livermore Nat. Lab., US Dept. of Commerce, Springfield, VA 22161, 1994.
- [108] D. Ruelle and F. Takens. On the nature of turbulence. *Comm. Math. Phys.*, 20:167–192, 1971. Addendum, **23**:343-344.
- [109] K. K. Sabelfeld and O. A. Kurbanmuradov. Stochastic Lagrangian models for two-particle motion in turbulent flows. *Monte Carlo Methods and Appl.*, 3(1):53–72, 1997.
- [110] K. K. Sabelfeld and O. A. Kurbanmuradov. Two-particle stochastic Eulerian-Lagrangian models of turbulent dispersion. *Math. and Comp. in Simulation*, 47:429–440, 1998.

- [111] S. Saitoh. *Theory of Reproducing Kernels and its Applications*, volume 189 of *Pitman research notes in mathematics*. Longman Scientific & Technical, 1988.
- [112] Y. Sato and K. Yamamoto. Lagrangian measurements of fluid-particle motion in an isotropic turbulent field. *J. Fluid Mech.*, 175:183–199, 1987.
- [113] B. L. Sawford. Rotation of trajectories in Lagrangian stochastic models of turbulent dispersion. *Boundary-Layer Meteorol.*, 93:411–424, 1999.
- [114] B. L. Sawford. Turbulent relative dispersion. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 33:289–317, 2001.
- [115] B. L. Sawford and M. S. Borgas. On the continuity of stochastic models for the Lagrangian velocity in turbulent. *Physica D*, 76:297–311, 1994.
- [116] B. L. Sawford and F. M. Guest. Lagrangian stochastic analysis of flux-gradient relationship in the Convective Boundary Layer. *J. Atmos. Sci.*, 44:1152–1165, 1987.
- [117] D. J. Shlien and S. Corrsin. Measurement of Lagrangian velocity autocorrelation in approximately isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 62:255–271, 1974.
- [118] I. N. Sneddon. *The Use of Integral Transform*. McGraw-Hill Book Company, 1972.
- [119] W. H. Snyder and J. L. Lumley. Some measurements of particle velocity autocorrelation functions in a turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, 48:41–71, 1971.
- [120] K. R. Sreenivasan. On the universality of the Kolmogorov constant. *Phys. Fluids*, 7:2778–2784, 1995.
- [121] R. L. Stratonovich. A new representation for stochastic integrals and equations. *J. SIAM Control*, 4:362–371, 1966.
- [122] R. B. Stull. *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic Publishers, 1988.
- [123] F. Tampieri. Ricerca orientata. Anzi, fondamentale. *Sapere*, Feb:82–83, 2003.
- [124] F. Tampieri and D. Anfossi. Dalla fisica teorica alla ricerca sul campo. *Sapere*, Ott:8–17, 2003.

- [125] F. Tampieri, A. Maurizi, and S. Alberghi. Lagrangian models of turbulence dispersion in the atmospheric boundary layer. In G. Solari, L. C. Pagnini, and G. Piccardo, editors, *Ingegneria del Vento in Italia 2000*, pages 37–49. SGEEditoriali, 2000.
- [126] F. Tampieri and G. Pagnini. Lagrangian models of dispersion in the atmospheric boundary layer. In G. Boffetta, G. Lacorata, G. Visconti, and A. Vulpiani, editors, *ISSAOS 2001. Chaos in Geophysical Flows*, pages 265–277. Otto Editore, Torino, 2003.
- [127] G. I. Taylor. Eddy motion in the atmosphere. *Philos. Trans. Roy. Soc. London A*, 215:1–26, 1915.
- [128] G. I. Taylor. Diffusion by continuous movements. *Proc. London Math. Soc.*, 20:196–211, 1921.
- [129] H. Tennekes. Eulerian-Lagrangian time microscales in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 67:561–567, 1975.
- [130] H. Tennekes. Similarity relations, scaling laws and spectral dynamics. In F. T. M. Nieuwstadt and H. van Dop, editors, *Atmospheric turbulence and air pollution modeling*, pages 37–68. Reidel, 1982.
- [131] H. Tennekes and J. L. Lumley. *A First Course in Turbulence*. The MIT Press, 1972.
- [132] D. J. Thomson. Criteria for the selection of stochastic models of particle trajectories in turbulent flows. *J. Fluid Mech.*, 180:529–556, 1987.
- [133] D. J. Thomson. A stochastic model for the motion of particle pairs in isotropic high-Reynolds-number turbulence, and its application to the problem of concentration variance. *J. Fluid Mech.*, 210:113–153, 1990.
- [134] A. A. Townsend. The measurement of double and triple correlation derivatives in isotropic turbulence. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, 43:560–570, 1947.
- [135] A. A. Townsend. *The Structure of Turbulent Shear Flow*. Cambridge University Press, 1976 edition, 1956.
- [136] N. G. van Kampen. Stochastic differential equations. *Physics Rep.*, 24(3):171–228, 1976.
- [137] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [138] A. Vulpiani. *Determinismo e Caos*. La Nuova Italia Scientifica, 1994.

- [139] C. Y. Wang. Exact solutions of the steady-state Navier-Stokes equations. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 23:159–177, 1991.
- [140] N. Wiener. . *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 7:253–, 1921.
- [141] J. D. Wilson and T. K. Flesch. Trajectory curvature as a selection criterion for valid Lagrangian stochastic models. *Boundary-Layer Meteorol.*, 84:411–425, 1997.
- [142] J. D. Wilson and B. L. Sawford. Review of Lagrangian stochastic models for trajectories in the turbulent atmosphere. *Boundary-Layer Meteorol.*, 78:191–210, 1996.
- [143] J. C. Wyngaard. Atmospheric turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 24:205–233, 1992.
- [144] A. M. Yaglom. On the acceleration field in a turbulent flow. *C. R. Acad. URSS*, 67:795–798, 1949.
- [145] P. K. Yeung. One- and two-particle Lagrangian acceleration correlations in numerically simulated homogeneous turbulence. *Phys. Fluids*, 6:962–972, 1997.
- [146] P. K. Yeung. Lagrangian investigation of turbulence. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 34:115–142, 2002.
- [147] P. K. Yeung and M. S. Borgas. Relative dispersion in isotropic turbulence. Part 1. Direct numerical simulations and Reynolds-number dependence. *J. Fluid Mech.*, 503:93–124, 2004.
- [148] P. K. Yeung and B. L. Sawford. Random-sweeping hypothesis for passive scalars in isotropic turbulence. *J. Fluid Mech.*, 459:129–138, 2002.
- [149] P. K. Yeung and Ye Zhou. Universality of the Kolmogorov constant in numerical simulations of turbulence. *Phys. Rev. E*, 56(2):1746–1752, 1997.